Semaines 13 et 14

Attention 1 *(pour les colleurs)*

- *Pas de th de convergence dominée dans la partie intégration.*
- *Les étudiants sont habitués à manipuler le vocabulaire de l'absolue converge plutôt que l'intégrabilité pour l'instant.*

Contenu:

- Variables aléatoires discrètes: Révisions des programmes précédents: couples de VA, indépendance, espérance, variance, covariance. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymée-Cebychev.
- Fonctions génératrices d'une VA entière.
- Loi des faible des grands nombres
- intégration sur un intervalle quelconque: fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. définition de l'intégrale, intégrales de Riemann, comparaisons à un fonction intégrable, intégration par parties, changement de variable C^1 strictement monotone.

Questions de cours: questions avec $(*)$ uniquement pour les meilleurs.

1. Si $X \geq 0$ est d'espérance finie alors pour tout $\alpha > 0$ $P(X \geq \alpha) \leq \dfrac{E(X)}{\alpha}$.
2. Si X^2 est d'espérance finie alors pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.
3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Majorer $P(X \geq a)$ dans les cas suivants
   - $X \geq 0$ et X d'espérance finie et $a > 0$. (Markov)
   - X^2 d'espérance finie et $a > 0$ (Markov)
   - e^X d'espérance finie et a quelconque (Markov)
   - X^2 d'espérance finie et $a > E(X)$ $(B.C)$
4. On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Soit X le nombre de fois où on obtient $Pile$. $\dfrac{X}{n}$ désigne donc la fréquence d'apparition de $Pile$. Déterminer n pour qu'on puisse affirmer que cette fréquence est strictement comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité d'au moins 0.9 (exo 88 chapître VAD)
5. Inégalité de Cauchy-Schwarz (énoncé seul).
   Si $X > 0$ et X et $\dfrac{1}{X}$ sont d'espérances finies, alors $\dfrac{1}{E(X)} \leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$ (exo 23 fn géné...)
6. définition de la covariance, bilinéarité de la covariance.
7. En utilisant la bilinéarité généralisée, exprimer $V(X_1 + \cdots + X_n)$ à l'aide des variances des X_i et de covariances de (X_i, X_j).
8. Expression de $V(X_1 + \cdots + X_n)$ lorsque les $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.
9. Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant même fonction génératrice ont même loi.
10. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $R_X = \dfrac{1}{q}$ et $\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.
11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $R_X = +\infty$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
12. $(*)$ Si X et Y sont indépendantes $G_{X+Y} = G_X G_Y$ (deux démonstrations).
13. Extension de la relation précédente à n variables aléatoires indépendantes. En déduire la fonction génératrice de X si $X \sim B(n, p)$.
14. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$: démonstration avec les fonctions génératrices.
15. Si $R_X > 1$, $G'_X(1) = E(X)$ et $G''_X(1) = E(X(X-1))$. Expression de $V(X)$ à l'aide de G_X.
    (résultat admis si $R_X = 1$ et G_X est dérivable (deux fois dérivable en 1)).

16. Enoncé et démonstration de la loi faible des grands nombres.

17. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{n}{n^2 + i^2}$. Etudier la convergence de la suite (S_n).

18. Citer les critères de comparaison permettant de montrer qu'une intégrale converge.

19. Pour $\alpha > 0$, convergence des intégrales $\int_0^1 \dfrac{1}{t^\alpha} dt$.

20. $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge par le calcul.

21. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \dfrac{1 - e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt$.

22. Si $a < b$, convergence de $\int_a^b \dfrac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et de $\int_a^b \dfrac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ par un changement de variable.

23. Convergence de $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^a (t+1)^b} dt$ (feuille d'exo intégration)

24. Convergence de $\int_0^1 \dfrac{\ln(t)}{t-1} dt$.(Exo 39 du cours)

25. Convergence de $\int_0^1 \dfrac{\ln(x)}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$.(Exo 49 du cours)

26. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt$ converge et est égale à $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$. (exo 44 du cours)

27. montrer que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

28. Montrer que si f admet une limite l en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, alors $l = 0$.

29. Montrer que $\int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$ converge. Commenter cet exemple.