DM 13 indications

Exercice 1:

(Si A est un évenement alors P_A est une probabilité et on peut appliquer l'additivité: propriété $(*)$ admise dans le cours VAD: P100 non démontré en cours que vous pouvez éventuellement redémontrer ou admettre).

Q1a: ATTENTION: Les paramètres des lois sont $1-q$ et $1-t$

Q1b: (cours)

Q1c: PT1 avec SCE($T_G = n$). Transformer $(T_G = n) \cap (T_G < T_R)$ pour utiliser l'indépendance de T_G et T_R.

Q2a: Transformer comme en 1c $(T_G = k) \cap (T_G < T_R)$ pour utiliser l'indépendance de T_G et T_R.

Q2b: Se ramener à une somme de série géométrique $(*)$

Q3 a: On peut intervertir les rôles de T_G et T_R dans les calculs précédents et $r = p$!

Q3b: 1:Ecrire $(T_G \neq T_R) = (T_G < T_R) \cup (T_R < T_G)$ et injecter dans $(T_G \neq T_R) \cap (T > k)$ pour faire apparaître $P_{(T_G<T_R)}$ et $P_{(T_R<T_G)}$.

2:$P(X = n)$ en fonction de $P(X > n-1)$ et $P(X > n)$ appliqué à $P_{(T_G \neq T_R)}$ (d'après $(*)$).

Exercice 2

Q1: Il faut expliquer pourquoi $X_m(w) > n$ et $X_m(w) < 0$ ne sont pas est pas possible.

La présentation la plus claire est une récurrence et voir que si $X_m = n$, il n'est pas possible que $X_{m+1} = n+1$.

Q2: Question difficile à rédiger proprement. De quoi dépend X_n? Lemme des coalitions sans pouvoir donner explicitement la fonction $f(X_0, U_{0,\ldots}, U_{m-1})$.

Q3: Distinguer

- $|i-j| > 1$
- $i = j-1$ et $1 \leq j \leq n$
- $i = j+1$ et $0 \leq j \leq n-1$

Q4: PT2 avec SCE $(X_m = j)$.

Cas $i = 0$ et $i = n$ à traiter à part pour voir qu'il s'intègrent dans la relation générale

Q5 a injecter le résultat de Q4 dans la définition de l'espérance.

Faire des chagement d'indice pour transformer les $(X_m = i+1)$ et $(X_m = i-1)$ en $(X_m = i)$ et regrouper.

Q5 b suite arithmético géométrique

Q6 découle de Q4

Q7 1: récurrence. Q6 ou Q4 et calculs sur coefficients binômiaux à simplifier

2: D'après 7.1, les Y_m sont identiques. Interpréter à l'aide de Q6.

Q8 Vérifier que le degré de $f(P)$ ne dépasse pas n.

Exercice 3

Q1a: 1: cours loi binomiale

2: Utiliser $(N = n) \cap (S = k) = (N = n) \cap (S_n = k)$ et S_n et N sont indépendantes (lemme des coalitions).

Q1b: On reconnaît $G_{S_n} = G_{X_1+\cdots+X_n}$ et on peut utiliser l'indépendance (On peut aussi utiliser le binôme) pour arriver à $(q+pt)^n$ ou passer par un schéma de Bernoulli pour utiliser G_{X_1}

Q1c: NE PAS UTILISER L'INDICATION (méthode plus simple)

Dans $G_S(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k P(S = k)$, Appliquer PT1 avec le SCE $(N = n)$:

Utiliser les sommations par paquets (fubini) pour faire apparaître l'exprression de la question précédente.

Q1d: Remarquer que $N - S$ s'obtient à partir de $(1 - X_1), \ldots, (1 - X_n)$ de la même façon que S s'obtient à partir de $X_1, \ldots, X_n$.

Q2a: Lire 1c et 1d pour les questions à utiliser. Ecrire $N = S + (N - S)$ et utiliser l'indépendance pour les fonctions génératrices.

Q2b: récurrence sur n (et triangle de Pascal).

Q3a: On N est d'espérance finie. On peut appliquer le cours pour exprimer $E(N)$ à l'aide de G_N. et justifier la dérivabilité de f en 0 et le calcul de $f'(0)$ (qui vaut finalement $-E(N)$).

Q3b: définition de la dérivabilité en 0.

Q3c: Etudier la limite de la suite $\left(p^k q^{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et utiliser la définition de la limite d'une suite

Q4: Difficile:

Considére $|f(t) - f'(0)\,t|$ et utiliser: 2b, Binôme, inégalité triangulaire, 3c, binôme

Q5 Commencer par travailler sur G_N.