DM 13

Exercice 3

Toutes les variables aléatoires réelles considérées dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé ($\Omega, \mathcal{A}, P$). Pour toute variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X sa fonction génératrice.

Soit $p \in]0,1[$; on note $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k et telle que $P(N=k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On définit les variables aléatoires $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $S(\omega) = S_{N(\omega)}$.
On admet que S ainsi définie est une variable aléatoire.

Q 1 *(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de S_n.*
Déterminer la loi conditionnelle sachant $(N = n)$ de la variable S.
(b) Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t^k P(S = k \mid N = n)$.
(c) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $G_S(t) = G_N(pt + q)$.
Indication : on pourra utiliser le SCE $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(d) Expliquer sans calcul pourquoi, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $G_{N-S}(t) = G_N(qt + p)$.

On suppose désormais que S et $N - S$ sont indépendantes et que N est d'espérance finie. On pose pour tout $t \in [0,1], f(t) = \ln(G_N(1-t))$.

Q 2 *(a) Que vaut $f(0)$? Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = f(pt) + f(qt)$.*
Indication : on pensera à utiliser les résultats des questions Q1c et Q1d.
(b) établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(p^k q^{n-k} t\right)$.

Q 3 *Soit $\varepsilon > 0$.*
(a) Montrer l'existence de $f'(0)$ et en donner une expression en fonction de N.
(b) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in [0,\alpha], |f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon x$.
(c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\forall k \in [[0,n,]], p^k q^{n-k} \leqslant \alpha$$

Q 4 *En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $f(t) = f'(0)t$.*

Q 5 *On admet le résultat précédent est vrai pour $t \in [0,2]$. Montrer que N suit une loi de Poisson.*

Solution de l'exercice 3

R 1 *(a) Comme S_n est la somme des n variables de Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même paramètre p, S_n suit la binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.*

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout k on a : $P_{(N=n)}(S=k) = \dfrac{P\left((S_n=k)\cap(N=n)\right)}{P(N=n)} = P(S_n=k)$, puisque $S_n = X_1+\cdots+X_n$ est indépendante de N (lemme des coalitions).

Ainsi la loi conditionnelle sachant $(N=n)$ de S est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

(b) D'après (a) on a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t^k P(S=k \mid N=n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} t^k P(S_n=k) = G_{S_n}(t) = G_{X_1+\cdots+X_n}(t)$. Or $X_1,\ldots,X_n$ indépendantes donc $G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = G_{X_1}(t)\times\cdots\times G_{X_n}(t) = (q+pt)^n$.

(c) On a bien $S(\Omega)\subset\mathbb{N}$ (car somme de 0 et de 1). Pour $t\in[0,1]$

$$\begin{aligned}
G_S(t) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} t^k P((S=k)\cap(N=n)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \sum_{n=0}^{+\infty} P((S=k)\cap(N=n)) && \textit{(formule des probas totales)}\\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(P(N=n)\sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(S=k\mid N=n)\right) && \textit{(sommation par paquets; tout est positif)}\\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)(q+pt)^n && \textit{(d'après la question précédente)}\\
&= G_N(q+pt) && \textit{(par définition de } G_N\textit{)}
\end{aligned}$$

(d) Comme $X_k\sim\mathcal{B}(p)$, on a $1-X_k\sim\mathcal{B}(q)$ et $((1-X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ famille de vA indépendantes (lemme des coalitions). De plus $N-S = \sum\limits_{i=1}^{N}(1-X_k)$.

Donc le résultat de la question précédente s'applique à $N-S$ en remplaçant p par q.

donc $\forall t\in[0,1]$, $G_{N-S}(t) = G_N(p+qt)$

R 2 *(a) Comme $(N=n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, on a :*

$$G_N(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n)1^n = 1 \qquad \textit{d'où } f(0)=0$$

Par indépendance de S et $N-S$, on a : $G_N = G_{S+(N-S)} = G_S\times G_{N-S}$,

D'où, pour tout $t\in[0,1]$: $G_N(t) = G_N(q+pt)\times G_N(p+qt)$

donc $G_N(1-t) = G_N(q+p(1-t))\times G_N(p+q(1-t)) = G_N(1-pt)\times G_N(1-qt)$ En prenant le logarithme,

$$f(t) = f(pt)+f(qt)$$

(b) Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la relation : $\forall t\in[0,1], f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(p^k q^{n-k} t\right)$.

- Pour $n=0$ la relation se résume à $f(t)=f(t)$ (donc est vraie).

- Si la relation est vraie pour une entier n, $n\geqslant 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(p^k q^{n-k} t\right) && \textit{(hyp. de récurrence)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(p^{k+1} q^{n-k} t\right) + f\left(p^k q^{n-k+1} t\right) && \left(\textit{remplacer } t \textit{ par } p^k q^{n-k} t \textit{ dans la question précédente}\right)\\
&= \binom{n}{n} f\left(p^{n+1} t\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right) f\left(p^k q^{n+1-k} t\right) + \binom{n}{0} f\left(q^{n+1} t\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f\left(p^k q^{n+1-k} t\right) && \textit{par la formule du triangle de PASCAL}
\end{aligned}$$

R 3 *(a) Par hypothèse, N est d'espérance donc G_N est dérivable en 1 , et qu'alors $G'_N(1) = E(N)$.*
D'où (dérivation dune composée) f est dérivable en 0 et : $f'(0) = -\frac{G'_N(1)}{G_N(1)} = -E(N)$.
(b) Comme f est dérivable en 0 , on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$,
soit, puisque $f(0) = 0 : \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} |f(x) - xf'(0)| = 0$.
Donc par définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ t.q. ; $\forall x \in]0, \alpha], \frac{1}{x} |f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon$, soit $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon x$, et cela reste vrai pour $x = 0$ de manière évidente.
Autre rédaction : f est dérivable en 0 si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \mathrm{o}(x) = xf'(0) + x\mathrm{o}(1)$.
Donc $|f(x) - xf'(0)| \underset{x\to 0^+}{=} x\mathrm{o}(1)$. Comme $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{o}(1)$, par définition de la limite il existe $\alpha > 0$ t.q. pour tout $x \in]0, \alpha]$, on a : $| \mathrm{o}(1) \leqslant \varepsilon$.
(c) Pour tout $k \in [[0n,]]$ on a : $p^k q^{n-k} \leqslant (\max(p, q))^n$. Or $(\max(p, q))^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, car $\max(p, q) \in]\, 0, 1[$.
Donc par définition de la limite, $(\max(p, q))^n \leqslant \alpha$ à partir d'un certain rang, et alors :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, p^k q^{n-k} \leqslant (\max(p, q))^n \leq \alpha$$

R 4 *Pour tout $t \in [0, 1]$, si $n \geqslant n_0$, d'après la question précédente (c), on a $x = p^k q^{n-k} t \in [0, \alpha]$ pour tout $k \leqslant n$.*
Donc, d'après (b), on a : $\left|f\left(p^k q^{n-k} t\right) - f'(0)p^k q^{n-k} t\right| \leqslant \varepsilon p^k q^{n-k} t$. Donc :

$$\begin{aligned}
|f(t) - f'(0)t| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(p^k q^{n-k} t\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} f'(0)t\right| \quad \textit{d'après Q2b car } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 \textit{ (binôme)} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f\left(p^k q^{n-k} t\right) - f'(0)p^k q^{n-k} t\right| \quad \textit{par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t \quad \textit{d'après la majoration ci-dessus} \\
&= \varepsilon t \quad \textit{d'après la formule du binôme} \\
&\leqslant \varepsilon \operatorname{car} t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

d'où, par théorème d'encadrement, en faisant tendre ε vers 0 , on a : $f(t) = f'(0)t$.

R 5 *On a donc : $\forall t \in [0, 2], \ln(G_N(1 - t)) = f(t) = f'(0)t$, soit $G_N(1 - t) = \mathrm{e}^{f'(0)t}$*
soit, en posant $x = 1 - t : G_N(x) = e^{f'(0)(1-x)}$ pour tout $x \in [-1, 1]$, ce qui est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre $-f'(0) = E(N)$.
Comme G_N caractérise la loi, N suit la loi de Poisson de paramètre $-f'(0) = E(N)$.