dm 13 Correction E1 et E2

Mathématiques

~~Corrigé du devoir surveillé n°6 SUJET STANDARD~~

Solution de l'exercice 1

Q1. (a) Comme T_G est le rang du premier succès « le joueur G fait Pile » dont les lancers sont indépendants de probabilité de succès $1-q$, on a $\boxed{T_G \sim \mathcal{G}(1-q)}$ (loi géométrique)

De même on a $\boxed{T_R \sim \mathcal{G}(1-r).}$

(b) D'après le cours sur la loi géométrique, on sait que $\boxed{P(T_R > n) = r^n}$ puisque l'évènement $(T_R > n)$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers de R donnent Face.

Autre méthode :

$P(T_R > n) = \displaystyle\sum_{m=n+1}^{+\infty} P(T_R = m) = \sum_{m=n+1}^{+\infty} (1-r)r^{m-1} = (1-r) \times \frac{r^n}{1-r} = r^n.$

(c) La $\boxed{\text{formule des probabilités totales}}$ avec le SCE $(T_G = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne :

$$\begin{aligned}
p = P(T_G < T_R) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((T_G < T_R) \cap (T_G = n)\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P\big((n < T_R) \cap (T_G = n)\big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(n < T_R)P(T_G = n) && \text{(par indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (1-q) q^{n-1} && \text{(d'après Q1a et Q1b)} \\
&= \boxed{\frac{(1-q)r}{1-qr}} && \text{(somme d'une série géométrique).}
\end{aligned}$$

Si $r = q$, comme $1 - q^2 = (1-q)(1+q)$, on a bien $\boxed{p = \frac{q}{1+q}}$.

Q2. (a) D'après la question précédente, on a $P(T_G < T_R) \neq 0$, donc la probabilité conditionnelle est bien définie. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{(T_G<T_R)}\big(T_G = k\big) &= \frac{P\big((T_G = k) \cap P(T_G < T_R)\big)}{P(T_G < T_R)} && \text{(def. d'une proba conditionnelle)} \\
&= \frac{P\big((T_G = k) \cap P(k < T_R)\big)}{P(T_G < T_R)} \\
&= \frac{P(T_G = k)P(T_R > k)}{P(T_G < T_R)} && \text{(indépendance de } T_G \text{ et } T_R) \\
&= \frac{(1-q)q^{k-1} \times r^k}{\frac{(1-q)r}{1-qr}} && \text{car } P(T_R > k) = r^k \\
&= \boxed{(qr)^{k-1}(1-qr).}
\end{aligned}$$

Ainsi la loi conditionnelle de T_G sachant $(T_g > T_R)$ est la loi $\boxed{\mathcal{G}(1-qr).}$

(b) Comme en Q1b, on en déduit : $P_{(T_G<T_R)}(T_G > k) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} (qr)^{j-1}(1-qr) = \boxed{(qr)^k.}$

Q3. (a) Par $\boxed{\text{symétrie puisque } T_G,\, T_R \text{ sont IID,}}$ on a $\boxed{P(T_G < T_R) = P(T_R < T_G) = p}$ (cf. Q1c) d'où $\boxed{P(T_G \neq T_R) = 2P(T_G < T_R) = 2p.}$

De même on peut échanger T_G et T_R dans le résultat de la question Q2b, d'où : $\boxed{P_{(T_G>T_R)}\big(T_R > k\big) = P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big) = q^{2k}.}$

(b) La probabilité conditionnelle est bien définie puisque $P(T_G \neq T_R) = 2p \neq 0$, et on a :

$$\begin{aligned}
&P_{(T_G\neq T_R)}(T > k)\\
=&\frac{P\big((T_G \neq T_R) \cap (T > k)\big)}{P(T_G \neq T_R)} \qquad \text{par definition d'une proba conditionnelle}\\
=&\frac{1}{P(T_G \neq T_R)} P\big([(T_G < T_R) \cup (T_G > T_R)] \cap (T > k)\big)\\
=&\frac{1}{P(T_G \neq T_R)} \Big(P\big((T_G < T_R) \cap (T > k)\big) + P\big((T_G > T_R) \cap (T > k)\big)\Big) \text{ par incompatibilité}\\
=&\frac{1}{P(T_G \neq T_R)} \Big(P\big((T_G < T_R) \cap (T_G > k)\big) + P\big((T_G > T_R) \cap (T_R > k)\big)\Big)\\
=&\frac{1}{P(T_G \neq T_R)} \Big(P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big)P(T_G < T_R) + P_{(T_G>T_R)}\big(T_R > k\big)P(T_G > T_R)\Big)\\
&\qquad \text{(formule des probabilités composées)}\\
=&\frac{1}{2P(T_G < T_R)} \Big(P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big)P(T_G < T_R) + P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big)P(T_G < T_R)\Big) \text{ cf. Q3a}\\
=&\boxed{P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big).}
\end{aligned}$$

En déduit que, pour tout $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
P_{(T_G\neq T_R)}(T = k) &= P_{(T_G\neq T_R)}(T > k-1) - P_{(T_G\neq T_R)}(T > k)\\
&= P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k-1\big) - P_{(T_G<T_R)}\big(T_G > k\big)\\
&= (q^2)^{k-1} - (q^2)^k = (1-q^2)(q^2)^{k-1} \text{ d'après Q2b.}
\end{aligned}$$

Ainsi la loi conditionnelle sachant $(T_G \neq T_R)$ de T est la loi $\boxed{\mathcal{G}(1-q^2)}$ qui est bien la loi sachant $(T_G < T_R)$ de T_G (d'après le résultat de Q2a).

Q4. Comme les indicatrices valent 0 ou 1 et que les évènements $(T_G < T_R)$ et $(T_G > T_R)$ sont incompatibles, on a $\boxed{J(\Omega) = [\![0, 2]\!]}$ et :

$$\boxed{(J = 1) = (T_G < T_R), \qquad (J = 2) = (T_G > T_R), \qquad (J = 0) = (T_G = T_R).}$$

Q5. D'après la question précédente et les résultats de la questions Q3a, on a :

$$P_{(T_G\neq T_R)}(J=1)=P_{(T_G\neq T_R)}(T_G<T_R)=\frac{P\big((T_G\neq T_R)\cap(T_G<T_R)\big)}{P(T_G\neq T_R)}=\frac{P(T_G<T_R)}{P(T_G\neq T_R)}=\frac{1}{2}$$

$$P_{(T_G\neq T_R)}(J=0)=P_{(T_G\neq T_R)}(T_G=T_R)=0$$

d'où $P_{(T_G\neq T_R)}(J=2)=1-P_{(T_G\neq T_R)}(J=0)-P_{(T_G\neq T_R)}(J=1)=\dfrac{1}{2}$

En résumé la loi conditionnelle de J sachant $(T_G\neq T_R)$ est donnée par :

k	0	1	2
$P_{[T_G\neq T_R)}(J=k)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(loi $\mathcal{U}\{1,2\}$).

Q6. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $(J=j)\cap(T=k)=\begin{cases}(T_G=k)\cap(T_G<T_R) & \text{si } j=1\\ (T_R=k)\cap(T_G>T_R) & \text{si } j=2\end{cases}$

Donc, comme $P(T_G\neq T_R)=2P(T_G>T_R)$ (cf. Q3a), on en déduit que :

$$\begin{aligned}P_{(T_G\neq T_R)}\big((J=1)\cap(T=k)\big)&=\frac{P\big((T_G\neq T_R)\cap(T_G=k)\cap(T_G<T_R)\big)}{P(T_G\neq T_R)}\\&=\frac{P\big((T_G=k)\cap(T_G<T_R)\big)}{P(T_G\neq T_R)}\\&=\frac{1}{2}\frac{P\big((T_G=k)\cap(T_G<T_R)\big)}{P(T_G>T_R)}\\&=\frac{1}{2}P_{(T_G<T_R)}(T_G=k)\\&=P_{(T_G\neq T_R)}(J=1)\times P_{(T_G\neq T_R)}(T=k),\end{aligned}$$

d'après Q5 et Q3b.
De même, on obtient : $P_{(T_G\neq T_R)}\big((J=2)\cap(T=k)\big)=P_{(T_G\neq T_R)}(J=2)\times P_{(T_G\neq T_R)}(T=k)$.
Et enfin : $P_{(T_G\neq T_R)}\big((J=0)\cap(T=k)\big)=0=P_{(T_G\neq T_R)}(J=0)\times P_{(T_G\neq T_R)}(T=k)$.
Ainsi : $\boxed{\forall j\in J(\Omega),\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P_{(T_G\neq T_R)}\big[(J=j)\cap(T=k)\big]=P_{(T_G\neq T_R)}(J=j)\times P_{(T_G\neq T_R)}(T=k),}$
ce qui prouve que $\boxed{T \text{ et } J \text{ sont indépendantes pour la probabilité } P_{(T_G\neq T_R)}.}$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Q1. Il est évident que $X_m(\Omega) \subset \mathbb{Z}$. Montrons par récurrence sur $m \geqslant 0$ que : $\boxed{X_m(\Omega) \subset [\![0, n]\!].}$

- c'est vrai pour $m = 0$ par hypothèse.
- Si c'est vrai pour l'entier m, alors, pour tout $\omega \in \Omega$:
  - si $U_m(\omega) < X_m(\omega)$: alors comme $U_m(\omega) \geqslant 0$, on a $X_m(\omega) \geqslant 1$, donc $X_{m+1}(\omega) = X_n(\omega) - 1 \in [\![0, n-1]\!]$;
  - si $U_m(\omega) \geqslant X_m(\omega)$: alors comme $U_m(\omega) \leqslant n-1$ et $X_{m+1}(\omega) = X_n(\omega) - 1$, on a $X_{m+1}(\omega) \in [\![1, n]\!]$.

  Donc, dans tous les cas, on a : $X_{m+1}(\omega) \in [\![0, n]\!]$.

Remarque : il n'y pas forcement égalité, par exemple si X_0 est constante.

Q2. Pour $m = 0$, la variable X_0 est indépendante de U_0 par hypothèse.
Pour $m \geqslant 1$, par construction la valeur prise par X_m ne dépend que des valeurs prises par $X_0, U_0, \ldots, U_{m-1}$ *i.e.* $\boxed{X_m \text{ est une fonction des variables aléatoires } X_0, U_0, \ldots, U_{m-1}.}$
Or $X_0, U_0, \ldots, U_{m-1}, U_m$ sont indépendantes, donc d'après le $\boxed{\text{lemme des coalitions}}$ X_m et U_m sont indépendantes.
Autre rédaction (si l'on s'autorise une version du lemme de coalitions avec une famille infinie) :
On montre par récurrence sur $m \geqslant 0$ que la famille $X_m, U_m, U_{m+1}, U_{m+2}, \ldots$ est indépendante.
C'est vrai pour $m = 0$ par hypothèse. Si c'est vrai pour m, alors c'est vrai pour $m+1$ en remplaçant la coalition X_m, U_m par la variable $X_{m+1} = f(X_m, U_m)$ avec $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x+1 & \text{si } y \leqslant x \\ x-1 & \text{si } y \geqslant x \end{cases}$$

Donc a fortiori X_m et U_m sont indépendantes.

Q3.
- $\boxed{\text{Si } |i-j| \neq 1,}$ il est clair que $P_{[X_m=j]}(X_{m+1} = i) = \boxed{0.}$
- $\boxed{\text{Si } 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } i = j-1 :}$

$$\begin{aligned}
&P_{[X_m=j]}(X_{m+1} = j-1) \\
=&\frac{P\big((X_m = j) \cap (X_{m+1} = j-1)\big)}{P(X_m = j)} && \text{(par définition d'une proba conditionnelle)} \\
=&\frac{P\big((X_m = j) \cap (U_m < j)\big)}{P(X_m = j)} && \text{(par définition de } X_m) \\
=&P(U_m < j) && \text{(indépendance de } X_m \text{ et } U_m) \\
=&\boxed{\frac{j}{n}} && \text{(loi de } U_m)
\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Si } 0 \leqslant j \leqslant n-1 \text{ et } i = j+1 :}$ de la même manière que le cas précédent, on obtient :

$$P_{[X_m=j]}(X_{m+1} = j+1) = P_{[X_m=j]}((X_m = j) \cap (U_m \geqslant j)) = P(j \leqslant U_m \leqslant n) = \boxed{\frac{n-j}{n}.}$$

Q4. Ainsi la $\boxed{\text{f. des probabilités totales}}$ avec le SCE $(X_m = j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ donne, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(X_{m+1} = i) &= \sum_{j=0}^{n} P_{[X_m=j]}(X_{m+1} = i) \cdot P(X_m = j) \\
&= \boxed{\begin{cases} P(X_n = 1) & \text{si } i = 0 \\ \frac{n-i+1}{n} P(X_m = i-1) + \frac{i+1}{n} P(X_m = i+1) & \text{si } i \in [\![1, n-1]\!] \\ P(X_m = n-1) & \text{si } i = n. \end{cases}}
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu en remarquant que les cas particuliers $i = 0$ et $i = n$ rentrent dans le cas général car (d'après Q1) $\boxed{P(X_m = -1) = P(X_m = n+1) = 0.}$

Q5. (a) Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
E(X_{m+1}) &= \sum_{i=0}^{n} iP(X_{m+1}=i)\\
&= \sum_{i=0}^{n} i\left(\frac{n-i+1}{n}P(X_m=i-1)+\frac{i+1}{n}P(X_m=i+1)\right) \qquad \text{d'après Q4}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i(n-i+1)P(X_m=i-1)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} i(i+1)P(X_m=i+1) \qquad \text{(linéarité de la sommation)}\\
&= \frac{1}{n}\left(0+\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(n-j)P(X_m=j)\right)+\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)jP(X_m=j)+0\right) \qquad \text{(indices décalés)}\\
&= \frac{1}{n}\left(nP(X_m=0)+\sum_{j=1}^{n-1}(j(n-2)+n)P(X_m=j)+(n-1)nP(X_m=n)\right) \quad \text{(indices décalés)}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}(j(n-2)+n)P(X_m=j) \text{ (insertion des termes particuliers)}\\
&= \frac{(n-2)}{n}\sum_{j=0}^{n} jP(X_m=j)+\sum_{j=0}^{n}P(X_m=j)\\
&= \boxed{\frac{(n-2)}{n}E(X_m)+1} \qquad \text{car } (X_m=j)_{0\leqslant j\leqslant n} \text{ est un SCE.}
\end{aligned}$$

(b) Il s'agit d'une $\boxed{\text{suite arithmético-géométrique.}}$

Après calculs, on obtient que $E(X_m)=\frac{n}{2}+\left[E(X_0)-\frac{n}{2}\right]\left(\frac{n-2}{n}\right)^m$.

D'où $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E(X_m)=\frac{n}{2}}$ puisque, pour $n\geqslant 2$, on a $\boxed{\frac{n-2}{n}\in]-1;1[.}$

Q6. Le résultat de la question Q4 s'écrit sous forme vectorielle :

$$Y_{m+1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \dots & 0\\ \frac{n}{n} & 0 & 2 & \ddots & \vdots\\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{n}{n}\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} & 0\end{pmatrix} Y_m=\frac{1}{n}A_nY_m.$$

i.e. il suffit de prendre $\boxed{M=\frac{1}{n}.}$

Q7. Montrons $\boxed{\text{par récurrence sur } m\geqslant 0}$ que $Y_m=\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}$:

- Pour $m=0$ c'est vrai par hypothèse de la question.
- Si c'est vrai pour $m\geqslant 0$, alors :

$$Y_{m+1}=\frac{1}{n}A_n\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\right)_{0\leqslant i\leqslant n}=\frac{1}{n2^n}\begin{pmatrix}\binom{n}{1}\\ \vdots\\ (n+1-i)\binom{n}{i-1}+(i+1)\binom{n}{i+1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n-1}\end{pmatrix},$$

d'où le résultat pour $m+1$ puisque pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
&(n+1-i)\binom{n}{i-1} + (i+1)\binom{n}{i+1} \\
=&(n+1-i)\frac{n!}{(i-1)!(n-i+1)!} + (i+1)\frac{n!}{(n-i-1)!(i+1)!} \\
=&\frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}\left(\frac{1}{n-i} + \frac{1}{i}\right) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!}\,\frac{n}{(n-i)i} = n\binom{n}{i}.
\end{aligned}$$

Le vecteur-colonne $Y_m \neq 0$ est donc vecteur propre de A_n associé la valeur n, donc $\boxed{n \in \mathrm{Sp}\,(A_n).}$

Q8. (a) On a : $f(1) = nX + (1-X^2)\cdot 0 = nX$.
Et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $f(X^j) = nX^{j+1} + (1-X^2)jX^{j-1} = (n-j)X^{j+1} + jX^{j-1}$.
Comme f est linéaire et que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$, cela montre que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$
Ce calcul donne aussi que $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base canonique est } A_n\ .}$

(b) Chaque polynôme P_j est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $j \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
f(P_j) &= nX(1-X)^{n-j}(1+X)^j + (1-X^2)[j(1-X)^{n-j}(1+X)^{j-1} - (n-j)(1-X)^{n-j-1}(1+X)^j] \\
&= (1-X)^{n-j-1}(1+X)^{j-1}\left[nX(1-X)(1+X) + j(1-X^2)(1-X) - (n-j)(1-X^2)(1+X)\right] \\
&= (1-X)^{n-j}(1+X)^j\left[nX + j(1-X) - (n-j)(1+X)\right] \\
&= (2j-n)(1-X)^{n-j}(1+X)^j = \boxed{(2j-n)P_j.}
\end{aligned}$$

(c) Les polynômes P_j étant non nuls, ce sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $2j-n$. On obtient ainsi $\boxed{n+1 \text{ valeurs propres distinctes}}$ de f et donc de A_n.
Comme $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ elle est donc $\boxed{\text{diagonalisable}}$ et $\mathrm{Sp}\,(A_n) = \{2j-n \mid j \in [\![0, n]\!]\}$.

(d) Il faut calculer Y_m. Par récurrence évidente avec la question Q6, on a $\boxed{Y_m = \left(\frac{1}{n}\right)^m {A_n}^m Y_0}$ (où Y_0 est la loi de X_0). Et $\boxed{{A_n}^m \text{ pourrait être calculé en diagonalisant } A_n.}$