DM 14 pour le 26 janvier 2026

Exercice 1:

On s'intéresse à la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$.

Q 1 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ *converge.* ***(indication: comparaison)***

Q 2 *En déduire que l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ *converge.* ***(indication: IPP pour augment la puissance au dénominateur)***

Q 3 *En déduire que l'intégrale généralisée I est convergente.* ***(indication:*** $u(t) = \sqrt{t}$ ***dans l'intégrale précédente)***

Q 4 *La fonction $f : t \mapsto \cos\left(t^2\right)$ admet-elle une limite en $+\infty$.* ***(indication: Trouver*** (a_n) *et* (b_n) ***de limite*** $+\infty$ ***telles que*** $f(a_n)$ *et* $f(b_n)$ ***n'ont pas la même limite)***

Exercice 2:

Etude de la convergence d'une série et d'intégrales généralisées

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

Q 5 *Etudier, suivant la valeur de α, à l'aide d'un changement de variable, la nature de l'intégrale généralisée* $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^{\alpha}} dt$. ***(indication: se ramener aux intégrales de Riemann par changement de variable)***

Q 6 *En déduire la nature de la série* $\sum \dfrac{1}{n \times \ln(n)^{\alpha}}$. ***(indication: faire une comparaison série intégrale***

Q 7 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_e^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *converge.* ***(indication: IPP)***

Q 8 *L'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *converge-t-elle?.****(indication: comparaison équivalent)***

Etude de la convergence d'une intégrale généralisée

Soit $f : [0, +\infty[\rightharpoonup \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante et admettant une limite nulle en $+\infty$.

Le but de l'exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisé $I = \int_0^{+\infty} f(t) \sin(t)\, dt$.

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) \sin(t)\, dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t)\, dt$.

Q 9 *Déterminer le signe de I_n.* ***(indication: distinguer suivant la parité de*** n***)***

Q 10 *Justifier que* $|I_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin(t)|\, dt = \int_0^{\pi} f(t + n\pi) \sin(t)\, dt$.
(indication: première égalité: distinguer suivant la parité de n
deuxième égalité: changement de variable affine et $|\sin(t+\pi| = ?$***)***

Q 11 *Justifier que la suite* $(|I_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
(indication: question précédente et décroissance de f***)***

Q 12 *En déduire que la suite* $(F(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
(indication: CSSA.en écrivant $F(n\pi)$ ***comme somme partielle de série (distinction parité de*** k ***pour signe de*** I_k ***et utilisation des hypothèses sur*** f ***(sans toucher à l'intérieur de l'intégrale à*** $|\sin(x)|$***) pour majoration en vue de limtie de*** $|I_k|$
On note L *la limite de cette suite.*

Q 13 *Soit* $x \geq 0$. *On pose* $n_x = \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$. *Montrer que* $|F(x) - F(n_x\pi)| \leq \pi f(n_x\pi)$.***(indication: même type de majoration que dans la question précédente)***

Q 14 *En déduire que l'intégrale généralisé* I *est convergente.*

Q 15 *En s'inspirant des calculs précédents, montrer que* $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *ne converge pas absolument..****(indication: même type de calcul minoration sans toucher à l'intérieur de l'intégrale à*** $|\sin(x)|$

Exercice 1:

R 1 *La fonction* $f : u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u^{3/2}}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$.
De plus, $0 \leq |f(u)| \leq \dfrac{1}{u^{3/2}}$ *et* $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{u^{3/2}} du$ *converge donc.* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ *converge.*

R 2 *Sous réserve de convergence, l'IPP avec* $v'(u) = \cos(u)$ *et* $w(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ *donne*
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du = \left[-\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du.$$
Or $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}} = 0$ *car* $\sin$ *est bornée et* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ *converge.*

R 3 *La fonction* $u : t \mapsto t^2$ *est une bijection de classe* C^1 *strictement croissante de* $]1, +\infty[$ *sur* $]1, +\infty[$.
Sous réserve de convergence, le changement de variable donne
$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t^2)}{2t} 2t dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du$ *qui converge donc* I *converge.*

R 4 *Posons* $u_n = \sqrt{2n\pi}$ *et* $v_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$. *On a* $f(u_n) = 1$ *et* $f(v_n) = -1$.
Si f *admettait une limite* l *en* $+\infty$, *alors, par composition des limites, on aurait* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = l$, *ce qui contredit ce qui précède donc la fonction* f *n'admet pas en* $+\infty$.

Exercice 2:

Etude de la convergence d'une série et d'intégrales généralisées

R 5 *Posons* $u(t) = \ln(t)$. *La fonction* u *est de classe* C^1 *et strictement croissante sur* $]e, +\infty[$.
Sous réserve de convergence $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt = \int_{\ln(e)}^{\lim_{+\infty} u} \dfrac{1}{u^\alpha} du = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{u^\alpha} du$ *qui converge ssi* $\alpha > 1$ *donc*
$\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$ *converge ssi* $\alpha > 1$.

R 6 *Si* $k \geq 2$ *et* $t \in [k, k+1]$ *alors* $0 < k \times \ln(k)^\alpha \leq t \times \ln(t)^\alpha \leq (k+1) \times \ln(k+1)^\alpha$
donc $\dfrac{1}{(k+1) \times \ln(k+1)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} \leq \dfrac{1}{k \times \ln(k)^\alpha}$ *et en intégrant ces inégalités entre* k *et* $k+1$,
$$\frac{1}{(k+1) \times \ln(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} \leq \frac{1}{k \times \ln(k)^\alpha}$$
Premier cas: $\alpha > 1$
On en déduit que si $k \geq 3$, *alors* $\dfrac{1}{(k) \times \ln(k)^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$
donc $\sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{1}{(k) \times \ln(k)^\alpha} \leq \int_2^{n} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt \leq \int_2^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$ *donc les sommes partielles de la série* $\sum \dfrac{1}{n \times \ln(n)^\alpha}$ *sont majorées donc la série* $\sum \dfrac{1}{n \times \ln(n)^\alpha}$ *converge.*
Deuxième cas: $\alpha \leq 1$
De même si $k \geq 2$, *alors* $\dfrac{1}{(k) \times \ln(k)^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$ *donc* $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k) \times \ln(k)^\alpha} \geq \int_2^{n+1} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_2^{n+1} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt = +\infty$ *car* $\int_e^{+\infty} \dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} dt$ *diverge et* $\dfrac{1}{t \times \ln(t)^\alpha} \geq 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k) \times \ln(k)^\alpha} = +\infty$ *donc la série* $\sum \dfrac{1}{n \times \ln(n)^\alpha}$ *diverge.*

R 7 *La fonction* $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)}$ *est définie et continue sur* $[e, +\infty[$

Effectuons, sous réserve de convergence une IPP avec $u(t) = \dfrac{1}{t \times \ln(t)}$ *et* $v(t) = -\cos(t)$.

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) v(t) = 0$ *car* $\cos$ *est bornée.*

On en déduit que $\int_e^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt = [u(t) v(t)]_e^{t \to +\infty} - \int_e^{+\infty} \dfrac{(\ln(t) + 1) \cos(t)}{(t \times \ln(t))^2} dt$.

Or $\left| \dfrac{(\ln(t) + 1) \cos(t)}{(t \times \ln(t))^2} \right| \leq \left| \dfrac{(\ln(t) + 1)}{(t \times \ln(t))^2} \right| \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2 \times \ln(t)} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[e, +\infty[$

donc $t \mapsto \dfrac{1}{t^2 \times \ln(t)}$ *est intégrable sur* $[e, +\infty[$

donc $t \mapsto \dfrac{(\ln(t) + 1)}{(t \times \ln(t))^2}$ *est intégrable sur* $[e, +\infty[$

donc $t \mapsto \dfrac{(\ln(t) + 1) \cos(t)}{(t \times \ln(t))^2}$ *est intégrable sur* $[e, +\infty[$

donc $\int_e^{+\infty} \dfrac{(\ln(t) + 1) \cos(t)}{(t \times \ln(t))^2} dt$ *converge donc* $\int_e^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *converge.*

R 8 *La fonction* $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)}$ *est définie et continue sur* $]1, +\infty[$.

On a $\ln(t) \underset{t \to 1}{\sim} t - 1$ *donc* $\dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} \underset{t \to 1}{\sim} \dfrac{\sin(1)}{t - 1} > 0$ *et* $\int_1^e \dfrac{1}{t - 1} dt$ *diverge donc* $\int_1^e \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *diverge donc* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t \times \ln(t)} dt$ *diverge.*

Etude de la convergence d'une intégrale généralisée

Attention 1 *La fonction* f *est décroissante donc* $\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \geq \lim\limits_{+\infty} f = 0$ *donc* f *est positive.*

R 9 *Soit* $k \in \mathbb{N}$.

- *Si* $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, *alors* $\sin(t) \geq 0$ *et* f *est positive donc* $I_{2k} \geq 0$.
- *Si* $t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, *alors* $\sin(t) \leq 0$ *et* f *est positive donc* $I_{2k+1} \leq 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.
- Si $t \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, alors $\sin(t) \geq 0$ donc $I_{2k} \geq 0$ et
$|I_{2k}| = I_{2k} = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(t) \sin(t)\, dt = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(t) |\sin(t)|\, dt$.
- Si $t \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, alors $\sin(t) \leq 0$ donc $I_{2k+1} \leq 0$.et
$|I_{2k+1}| = -I_{2k+1} = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f(t) \times (-\sin(t))\, dt = \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} f(t) |\sin(t)|\, dt$.

On a donc $|I_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin(t)|\, dt$.
Le changement de variable $u(t) = t - n\pi$ donne $|I_n| = \int_0^{\pi} f(u + n\pi) |\sin(u + n\pi)|\, du$
Or $\sin(u + \pi) = -\sin(u)$ donc $|\sin(u + n\pi)| = |\sin(u)|$ donc $u \mapsto |\sin(u)|$ est π-périodique donc
$|I_n| = \int_0^{\pi} f(u + n\pi) |\sin(u)|\, du = \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \sin(u)\, du$.

R 10 *La fonction* f *est décroissante donc si* $u \in [0, \pi]$ *alors* $f(u + (n+1)\pi) \leq f(u + n\pi)$ *et* $\sin(u) \geq 0$ *donc* $f(u + (n+1)\pi) \sin(u) \leq f(u + n\pi) \sin(u)$ *donc, en utilisant la question précédente,* $|I_{n+1}| \leq |I_n|$. *La suite* $(|I_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ *est donc décroissante.*

R 11 *On a* $F(n\pi) = \int_0^{n\pi} f(t)\left|\sin(t)\right| dt = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = S_{n-1}$ *avec* $S_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$ *somme partielle de la série* $\sum I_n$.
Appliquons le CSSA:
(H_1) : *La série* $\sum I_n$ *est alternée d'après la première question de l'exercice.*
(H_2) : *La suite* $(|I_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est donc décroissante.*
(H_3) : *Pour* $u \in [0,\pi]$, $f(u+n\pi)\left|\sin(u+n\pi)\right| \leq f(n\pi)$ *car* f *est décroissante*
donc $0 \leq |I_n| = \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\left|\sin(u+n\pi)\right| du \leq \int_0^{\pi} f(n\pi)\, du = \pi f(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
La série $\sum I_n$ *converge donc la suite* (S_n) *converge donc*
la suite $(F(n\pi))_{n\in\mathbb{N}^*} = (S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers une limite* L. *(simple décalage d'indice).*

R 12 *On a* $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$ *donc* $n_x \leq \dfrac{x}{\pi} < n_x + 1$ *donc* $n_x\pi \leq x < (n_x+1)\pi$. *On a donc*
$|F(x) - F(n_x\pi)| = \left|\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt - \int_0^{n_x\pi} f(t)\sin(t)\, dt\right| = \left|\int_{n_x\pi}^x f(t)\sin(t)\, dt\right| \leq \int_{n_x\pi}^x |f(t)\sin(t)|\, dt$ *donc*
$|F(x) - F(n_x\pi)| \leq \int_{n_x\pi}^x f(t)\, dt \leq \int_{n_x\pi}^x f(n_x\pi)\, dt = (x - n_x\pi) f(n_x\pi) \leq \pi f(n_x\pi)$.*car* f *est décroissante.*

R 13 *On a* $\dfrac{x}{\pi} - 1 < n_x$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} n_x = +\infty$.
On en déduit, par composition des limites, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi f(n_x\pi) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(n_x\pi) = L$.
L'inégalité $|F(x) - F(n_x\pi)| \leq \pi f(n_x\pi)$ *entraîne que* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$ *donc l'intégrale généralisé* I *est convergente.*

R 14 *Comme précédemment,*
$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin(t)|}{t\times\ln(t)} dt \geq \dfrac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, dt = \dfrac{2}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}$ *noté* u_n.
Or $\ln((n+1)\pi) = \ln(n+1) + \ln(\pi)$ *et* $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))$ *donc* $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
On en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi n\ln(n)}$.
D'après la premlière partie, la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ *diverge donc*
la série $\sum u_n$ *diverge donc la série* $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin(t)|}{t\times\ln(t)} dt$ *diverge.*
On en déduit que $\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin(t)|}{t\times\ln(t)} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{|\sin(t)|}{t\times\ln(t)} dt \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ *(SATP)*
donc $\int_{\pi}^{+\infty} \dfrac{|\sin(t)|}{t\times\ln(t)} dt$ *ne converge pas donc* $\int_{e}^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t\times\ln(t)} dt$ *ne converge pas absolument.*

.1 Etude de la convergence absolue de l'intégrale I

Exercice 1 *On pose, pour $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$*

1. *Montrer que $\int_0^1 f(t)\, dt$ est une intégrale convergente.*
2. *Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est une intégrale convergente (on pourra effectuer une intégration par parties).*
3. *Justifier l'inégalité $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ et en déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ n'est pas absolument convergente. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?*

Exercice 2 *On reprend l'exercice précédent avec une autre méthode.*
On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin(t)}{t} dt$ et $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \dfrac{\sin(t)}{t} \right| dt$, $n \geq 1$

1. *Montrer que $u_n = (-1)^n \int_0^\pi \dfrac{\sin(t)}{t + n\pi} dt$ et $v_n = \int_0^\pi \dfrac{\sin(t)}{t + n\pi} dt$.*
2. *Montrer que $\dfrac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi |\sin(t)|\, dt \leq v_n \leq \dfrac{1}{n\pi} \int_0^\pi |\sin(t)|\, dt$.*
3. *En déduire que la série $\sum u_n$ converge et que la série $\sum v_n$ diverge.*
4. *En déduire que $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t} dt$ converge.et $\int_\pi^{+\infty} \left| \dfrac{\sin(t)}{t} \right| dt$ diverge.*
5. $(*)$ *On pose, pour $n \geq 1$ et $t \in [0, \pi]$, $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n \sin(t)}{t + n\pi}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, \pi]$. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que*
   $\int_\pi^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\pi \varphi(t)\, dt$.

Attention 2 *La convergence d'une série numérique $\sum u_n$ entraîne $\lim_{+\infty} u_n = 0$. La convergence de l''intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ n'entraîne pas que $\lim_{+\infty} f = 0$.*

I Lien entre convergence de l'intégrale et limite en l'infini

Exercice 3 *Soit un réel a et une fonction f définie et continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et que f admet une limite l en $+\infty$, alors $l = 0$.*
2. *Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et que f est monotone, alors f admet une limite 0 en $+\infty$.*
3. *On pose $I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$. Montrer que l'intégrale I est convergente. En déduire qu'il existe des fonctions f continue sur $[a, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}$.telles que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente mais qui n'admette pas de limite en $+\infty$.*

Exercice 4 *Construction d'une fonction continue positive non bornée intégrable sur $[2, +\infty[$.*
On définit la fonction f sur l'intervalle $[2, +\infty[$ de la manière suivante: soit $n \in \mathbb{N}^*$. La restriction de la fonction f au segment $\left[n, n + \frac{1}{2n^3}\right]$ est affine et vérifie $f(n) = 0$ et $f\left(n + \frac{1}{2n^3}\right) = n$. La restriction de la fonction f au segment $\left[n + \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$ est affine et vérifie $f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = 0$ et la restriction de f à l'intervelle $\left[n + \frac{1}{n^3}, n + 1\right[$. Donner l'allure de la représentation graphique de f. Justifier que la fonction f est continue et n'est pas bornée. Montrer que f est intégrable sur $[2, +\infty[$.