Semaines 15 et 16

Contenu:

- révisions d'analyse de première année: inégalité de Taylor Lagrange, formule de Taylor avec reste intégral.
- suites de fonctions: continuité de la limite, interversion limite intégrale sur un segment, dérivabilité de la limite, théorème de convergence dominée.
- Séries de fonctions: continuité de la somme, interversion limite intégrale sur un segment et sur un intervalle quelconque, dérivabilité de la somme.

Pour les colleurs: hors programme de S 15 et 16

- Pour le passage de "tout segment" à l'intervalle entier les étudiants doivent expliquer.
- théorème de la double limite (suites et séries de fonctions)
- généralisation du th de dérivabilité aux fonctions de classe C^k (suites et séries de fonctions)
- Pas de convergence uniforme de séries de fonctions sans convergence normale pour l'instant.

Questions de cours:

1. Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{x+n}$. Etudier la CV simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
3. On pose $f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx}$. Etudier la CV simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose $f_n(x) = x^n$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. En déduire en utilisant le théorème de continuité de la limite que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
5. Enoncer le théorème de continuité et le théorème de dérivabilité de la limite.
6. Enoncer et démontrer le théorème d'interversion limite intégrale sur un segment.
7. On pose $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,+\infty[$. Calculer $f_n(x_n)$ avec x_n bien choisi et en déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ avec $0 < a < b$.
8. Enoncer le théorème de dérivabilité de la limite.
9. Enoncé du th de cv dominée. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} dt$. Déterminer la limite de (I_n).
10. Etudier la convergence de la suite $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. (ex 7 chap CV dominée)
12. Définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions. Caractérisation avec le reste.
13. Définition de la convergence normale d'une série de fonctions. Majoration uniforme de $|R_n(x)|$ s'il y a convergence normale. Convergence normale entraîne convergence uniforme.
14. Enoncé des théorèmes de continuité et de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions.
15. Enoncer le théorème d'interversion série-intégrale sur un segment. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $u_n(x) = \dfrac{x^n}{(n+1)^2}$ et $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

    Etudier l'existence de $f(x)$. Montrer que f est continue sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(x)\, dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$. Expliquer pourquoi le théorème d'interversion sur les séries entières ne s'applique pas (exercice 1).
16. Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{2ch(x)} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. (exercice 2)

17. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^3} u_n(x)$. S est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Ecrire $\int_0^{\pi} S(x)\,dx$ comme somme d'une série numérique.

18. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{1+n^3} u_n(x)$. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

19. convergence simple de $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, sens de variation de la somme S (sans passer par la dérivation). $1 \leq S(x) \leq \frac{1}{1-e^{-x}}$ pour $x > 1$, limite de S en $+\infty$ (exo 49).

20. convergence simple de $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, la somme S est C^2 sur $]0, +\infty[$ et vérifie une équa diff du second ordre dont le second membre s'exprime sans somme de série.(exo 49).