

DM 15 pour le 6 février 2026

Exercice 1: Intversion série intégrale

On pose, pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x^2}{e^x + 1}$

Q 1 Montrer que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q 2 En utilisant la série géométrique, écrire, pour $x \in]0, +\infty[$, $f(x)$ sous forme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Préciser $u_n(x)$.

On pose, pour $x \geq 0$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) = x^2 e^{-nx}$.

Q 3 Montrer que v_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Q 4 Calculer $\int_0^{+\infty} v_n(x) dx$.

Q 5 Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x + 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$.

Exercice 2: (Exercice 45 de la feuille sur les suites de fonctions)

On pose $I = [0, 2]$. Soit g la fonction définie sur I par $g : x \mapsto \sqrt{2+x}$.

Q 6 Montrer que $g(I) \subset I$. Déterminer le signe de $g(x) - x$ sur l'intervalle I .

Pour tout $t \in I$, on pose $f_0(t) = t$ et $\forall t \in I$, $f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)}$.

Q 7 Soit $t \in [0, 2]$ fixé.

a Montrer que la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge.

b Déterminer la limite de la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$.

c En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

Q 8 Justifier que $\forall t \in I$, $0 < g'(t) \leq \frac{1}{2}$. En déduire que $|f_{n+1}(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2} |f_n(t) - f(t)|$.

Q 9 En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f .

Q 10 Justifier que la suite $\left(\int_0^2 f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 3: Convergence dominée et intégrales sur un intervalle qui dépend de n

Le but de l'exercice est de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Q 11 Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} \leq e^{-x^2}$

Comme le théorème de convergence dominée s'applique avec un même intervalle pour toutes les fonctions de la

suite de fonction, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geq 0$, $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$.

Q 12 Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(on expliquera clairement pourquoi on peut travailler sur une des deux formules définissant $f(x)$).

Q 13 Conclure.

Correction DM 15

Exercice 1

R 1 La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

En $+\infty$, on a $x^2 f(x) = \frac{x^4}{e^x + 1} \sim x^4 e^{-x} \rightarrow 0$ donc $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

R 2 On a, pour $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2}{e^x + 1} = \frac{x^2}{e^x(1 + e^{-x})} = x^2 e^{-x} \frac{1}{1 - (-e^{-x})} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (e^{-x})^n$ (convergence car $0 < e^{-x} < 1$)

D'où $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^2 e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^2 e^{-nx}$. Posons $u_n(x) = (-1)^{n-1} x^2 e^{-nx}$. On a $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

On peut résumer cela en disant que

(1) : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme S

R 3 On remarque $v_n(x) = |u_n(x)|$.

On a $x^2 v_n(x) = x^4 e^{-nx} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (CC) donc $v_n(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ donc v_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

R 4 On effectue deux IPP (sous réserve de limites finies),

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} v_n(x) dx &= \left[-\frac{1}{n} x^2 e^{-nx} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx = \frac{2}{n} \int_0^{+\infty} x e^{-nx} dx \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-nx} = 0 : (CC) \\ &= \left[-\frac{2}{n^2} x e^{-nx} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{2}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-nx} = 0 : (CC) \\ &= -\frac{2}{n^3} [e^{-nx}]_0^{+\infty} = \frac{2}{n^3} \end{aligned}$$

R 5 Appliquons le théorème d'interversion séries-intégrales sur un intervalle quelconque

- Chaque u_n est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable car $|u_n| = v_n$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et a pour somme f (voir (1)) et la fonction f est continue donc CPM sur $]0, +\infty[$.

- On a $|u_n| = v_n$ et $\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} v_n(x) dx = \frac{2}{n^3}$ donc $\sum \int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx$ est une série convergente.

On en déduit que f est intégrable (ce qu'on avait déjà vu) et que

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} v_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n^3}.$$

Exercice 2:

R 6 La fonction g est croissante et continue donc $g(I) = [g(0), g(2)] = [0, 2] \subset I$. On a $g(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \frac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}$. L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ admet -1 et 2 comme solutions donc $x^2 - x - 2 \leq 0$ si $x \in [-1, 2]$ donc g est positive sur l'intervalle I .

R 7 Soit $t \in [0, 2]$ fixé.

- a** On a $f_{n+1}(t) = g(f_n(t))$ et $f_0(t) = t \in I$ donc, comme $g(I) \subset I$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \in I$. On déduit de la question précédente que $g(f_n(t)) \geq f_n(t)$ donc la suite $(f_n(t))$ est croissante et majorée par 2 donc converge.
- b** Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$. La fonction g est continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(f_n(t)) = g(l)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(t) = l$ donc $l = g(l)$ donc $g(l) - l = 0$ donc $l = 2$ ou $l = -1$ (voir première question) donc $l = 2$ car $l \geq 0$.
- c** Le raisonnement est valable pour tout $t \in I$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f constante égale à 2.

R 8 Si $t \in I$, $2+t > 0$ donc g est dérivable sur I et $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{2+t}}$. $t \geq 0$ entraîne $2\sqrt{2+t} \geq 2\sqrt{2} > 0$ donc $0 < g'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2}$. On a $f(t) = 2$ donc $g(f(t)) = f(t)$ donc $|f_{n+1}(t) - f(t)| = |g(f_n(t)) - g(f(t))| \leq \frac{1}{2} |f_n(t) - f(t)|$.

R 9 On a donc $|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2} |f_{n-1}(t) - f(t)| \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} |f_0(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2^n}$ car $f_0(t) = t \in I$ et $f(t) = 2$. On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ donc la suite (f_n) converge uniformément vers f .

R 10 La fonction f_0 est continue et $f_1 = \sqrt{2+f_0}$ donc f_1 est continue. Par récurrence, on montre que pour tout n , f_n est continue sur I . La suite (f_n) converge uniformément vers f . donc la suite $\left(\int_0^2 f_n(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^2 f(t) dt = 4$.

Exercice 3:

R 11 Si $0 \leq x < n$ alors $-\frac{x^2}{n^2} > -1$, $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)}$. Or $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ donc $e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} \leq e^{n \times \frac{-x^2}{n^2}} = e^{-x^2}$ et l'inégalité est immédiate pour $x = n$.

R 12 Soit $x \geq 0$ fixé.

pour tout $n \geq n_0 = \lfloor x \rfloor + 1$ on a $f_n(x) = \exp\left(n^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)\right)$ et comme $\begin{cases} \ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{n^2} = 0 \end{cases}$, on a $n^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2$.

n donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = -x^2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = e^{-x^2}$

R 13 (H1) : On a $\lim_{x \rightarrow n^-} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = 0$ donc chaque fonction f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H2) : La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.

(H2) : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2}$ donc $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ (inégalité immédiate pour $x > n$).

Or $\forall x \geq 1$, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\varphi : x \mapsto e^{-x^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée précédent permet d'affirmer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$