

DM 16 pour le 13 février 2026

Problème:

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ par deux méthodes

Q 1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ converge.

Q 2 Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Q 3 Première méthode: intégration terme à terme de série entières sur $[0, x]$ et passage à la limite

a Justifier que la fonctions $\begin{cases}]-1, 1[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t} \end{cases}$ admet un prolongement de classe C^∞ développable en série entière sur $] -1, 1[$.
(on pourra noter h ce prolongement par continuité).

b Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que $\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

c On pose, pour $x \in [0, 1]$, $u_n(x) = -\frac{x^n}{n^2}$.
Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
En déduire que $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Dans la suite, on pose, pour x réel, $v_n(x) = -\frac{x^n}{n+1}$

Q 4 Deuxième méthode: En appliquant le théorème d'intégration terme à terme sur in intervalle quelconque, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

CONCLUSION: On peut intégrer terme à terme sans justification une série entière de rayon R sur un segment inclus dans $] -R, R[$. Si on veut le faire sur $[0, R[$, il faut justifier. On vient de voir deux moyens de le faire et on verra une troisième méthode s'appuyant sur le CSSA).

Si le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque s'applique, c'est souvent la méthode la plus simple.

Etude de $\int_0^1 \sqrt[n]{1-x^n} dx$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonctions f_n sur l'intervalle $[0, 1[$ par l'égalité $f_n(x) = \ln(1-x^n)$ et la fonction g_n sur l'intervalle $[0, 1]$ par l' égalité $g_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n}$.

On pose $J_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ et $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$.

Etude de J_n

Q 5 Montrer que f_1 est intégrable sur $[0, 1[$ et calculer $\int_0^1 f_1(x) dx$.

Q 6 Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 0$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale J_n existe.

Q 7 Montrer que la suite (J_n) converge. Déterminer sa limite.

Q 8 Montrer que $J_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$.

En déduire qu'il existe un réel K tel que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence $J_n \sim \frac{K}{n}$.

Etude de I_n

Q 9 Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers une fonction g sur le segment $[0, 1]$.

Q 10 La suite fonctions (g_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Q 11 Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Q 12 Justifier, pour tout réel négatif u , la double inégalité: $1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}$.

Q 13 Justifier que la fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Q 14 Montrer que $\frac{1}{n} J_n \leq I_n - 1 \leq \frac{1}{n} J_n + \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \ln^2(1-x^n) dx$ et en déduire que $I_n = 1 + \frac{K}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Problème:

Calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ par deux méthodes

R 1 Le changement de variable affine $u(t) = 1 - t$ donne $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} du$.

or $\frac{\ln(u)}{1-u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \ln(u) < 0$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(u) du$ converge donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u} du$ converge donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ converge.
(autre méthode: comparaison à $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$).

R 2 On a la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ définie et continue sur $]0, 1[$.

On a $\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$ donc $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ admet un prolongement par continuité en 0 donc est intégrable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$

De plus $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ converge et $\frac{\ln(1-t)}{t} < 0$ (de signe constant) donc $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc sur $]0, 1[$.

R 3 Intégration terme à terme de série entières sur $[0, x]$ et passage à la limite

a Pour $t \in]-1, 1[$ on a $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ (qui est de rayon de convergence $R = 1$) donc si $t \neq 0$ alors

$$\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

La série entière $\sum \frac{t^n}{n+1}$ a donc pour rayon de convergence 1 et donc $h : t \mapsto -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$ est un prolongement de $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$. On peut intégrer terme à terme la série entière $\sum \frac{t^n}{n+1}$ sur $[0, x]$ car $|x| < 1$.

$$\text{On a donc } \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x -\frac{t^n}{n+1} dt = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

c Posons $v_n(t) = -\frac{t^{n-1}}{n}$. la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, x]$ (car

$\|u_n\|_\infty \leq \frac{x^{n-1}}{n} \leq x^{n-1}$ et la série $\sum x^{n-1}$ converge) et les fonctions v_n sont continues donc on peut intervertir

$$\text{série et intégrale: } \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x -\frac{t^{n-1}}{n} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

R 4 On pose, pour $x \in [0, 1[$, $v_n(x) = -\frac{x^n}{n+1}$.

(H₁) On a déjà vu que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $[0, 1[$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = h(x)$ ($\frac{\ln(1-x)}{x}$ si $x \neq 0$).

(H₂) Les fonctions v_n et h sont continues par morceaux sur $[0, 1[$.

(H₃) Pour tout n , v_n est intégrable sur $[0, 1[$ et $\int_0^1 |v_n(x)| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} > 0$ donc la

série numérique $\sum \int_0^1 |v_n(x)| dx$ converge par comparaison avec une série de Riemann.

On en déduit que

(C₁) la fonction h est intégrable sur $[0, 1[$ (déjà connu)

(C₂) la série numérique $\sum \int_0^1 v_n(x) dx$ converge (immédiat car $v_n = -|v_n|$)

(C₃) on peut intervertir: $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(n+1)^2}$.

On a donc bien $\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Etude de J_n

R 5 La fonction f_1 est continue sur $[0, 1[$ et sous réserve d'intégrabilité

$\int_0^1 |f_1(x)| dx = - \int_0^1 \ln(1-x) dx = - \int_0^1 \ln(u) du$ (on a posé $u(x) = 1-x$ qui est affine donc C^1 et bijection de $[0, 1[$ dans $]0, 1]$). La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc $\int_0^1 |f_1(x)| dx$ est convergente donc f_1 est intégrable. De plus, par IPP, sous réserve de limite finie, $\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \ln(u) du = [u \ln(u)]_0^1 - \int_0^1 u du = -1$.

Remarque On peut faire une IPP dans $\int_0^1 |f_1(x)| dx$ sans changement de variable préalable.

R 6 Pour tout $x \in [0, 1[$, $0 \leq x^{n+1} < x^n$ d'où $1 - x^n < 1 - x^{n+1} \leq 1$ d'où $\ln(1 - x^n) < \ln(1 - x^{n+1}) \leq 0$ et donc $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq 0$.

R 7 Appliquons le théorème de convergence dominée:

- Fixons $x \in [0, 1[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle f (qui est CPM) sur $[0, 1[$.

- Chaque f_n et f sont continues donc CPM sur $[0, 1[$.

- On a $|f_n(x)| \leq |f_1(x)|$ et f_1 est CPM et intégrable sur $[0, 1[$.

Conclusion: la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)_n$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0$.

R 8 Posons $u(x) = x^n$. La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, elle est de classe C^1 et $u'(x) = nx^{n-1} \neq 0$. Il s'agit donc d'une bijection de classe C^1 de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$.

On a $J_n = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^n)}{nx^{n-1}} \times nx^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$.

Appliquons le théorème de convergence dominée sur $]0, 1[$ pour déterminer la limite de $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$.

Posons $h_n(u) = \frac{\ln(1-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}$.

(H₁): Fixons $u \in]0, 1[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \frac{\ln(1-u)}{u}$.

La suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction h sur $]0, 1[$.

(H₂): Chaque h_n et h sont continue (donc CPM) sur $]0, 1[$.

(H₃): si $u \in]0, 1[$, $|h_n(u)| = \left| \frac{\ln(1-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}} \right| \leq |\ln(1-u)| = |f_1(u)|$ car $u^{\frac{n-1}{n}} \leq 1$ et f_1 est intégrable sur $]0, 1[$.

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(u) du = \int_0^1 h(u) du = -\frac{\pi^2}{6} = K$. Or $J_n = \frac{1}{n} \int_0^1 h_n(u) du$ donc $J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n}$.

Remarque Il est fréquent que l'application du th de convergence dominée après changement de variable permette d'obtenir un résultat plus intéressant.

Etude de I_n

R 9 Convergence simple

Fixons $x \in [0, 1]$. $g_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n} = e^{\frac{1}{n} \ln(1-x^n)}$.

Si $x < 1$, $g_n(x) = \sqrt[n]{1-x^n} = e^{\frac{1}{n} \ln(1-x^n)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 1$

Si $x = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(1) = 0$.

La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction g définie par $g(1) = 0$ et $g(x) = 1$ si $x \neq 1$.

R 10 Chaque fonction g_n est continue sur $[0, 1]$. Si la suite de fonctions (g_n) convergeait uniformément vers la fonction g sur $[0, 1]$, alors la fonction g serait continue. Or g n'est pas continue en 1 donc la convergence n'est pas uniforme.

R 11 Appliquons le théorème de convergence dominée:

Chaque g_n est continue (donc CPM) sur $[0, 1]$. La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction g continue par morceaux sur $[0, 1]$.

Par ailleurs, $|g_n(x)| \leq 1$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0, 1]$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$.

R 12 Soit $u \leq 0$. La fonction exponentielle est de classe C^2 donc $e^u = 1 + u + \int_0^u (u-t) e^t dt$ (formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1)

Or $\int_0^u (u-t) e^t dt = \int_u^0 (t-u) e^t dt$ et $0 \leq \int_u^0 (t-u) e^t dt \leq \int_u^0 (t-u) dt = \left[\frac{(t-u)^2}{2} \right]_u^0 = \frac{u^2}{2}$

On en déduit que $1 + u \leq e^u \leq 1 + u + \frac{u^2}{2}$.

(On peut aussi remarquer que l'inégalité de gauche est au programme et que l'autre s'obtient en étudiant la fonction obtenue par différence).

R 13 la fonction $\ln^2(x)$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln^2(x) = 0$ donc $\ln^2(x) = o_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ et $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc $x \rightarrow \ln^2(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

R 14 On a $\int_0^1 g_n(x) dx - 1 = \int_0^1 (g_n(x) - 1) dx = \int_0^1 \left(e^{\frac{1}{n} \ln(1-x^n)} - 1 \right) dx$.

Soit $x \in [0, 1[$ d'après la question précédente,

$$\frac{1}{n} \ln(1-x^n) \leq e^{\frac{1}{n} \ln(1-x^n)} - 1 \leq \frac{1}{n} \ln(1-x^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \ln(1-x^n) \right)^2.$$

Par ailleurs $\ln^2(1-x^n) \leq \ln^2(1-x)$ et la fonction $\ln^2(1-x)$ est intégrable sur $[0, 1[$ car la fonction $\ln^2(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$ (changement de variable $u = 1-x$).

On a donc $\frac{1}{n} J_n \leq I_n - 1 \leq \frac{1}{n} J_n + \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \ln^2(1-x^n) dx$.

Du fait que $0 \leq \ln^2(1-x^n) \leq \ln^2(1-x)$ qui est intégrable sur $[0, 1[$ on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln^2(1-x^n) dx = 0$.

Or $1 + \frac{1}{n} J_n \leq I_n \leq 1 + \frac{1}{n} J_n + \frac{1}{2n^2} \int_0^1 \ln^2(1-x^n) dx$ et $\frac{1}{n} J_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{K}{n^2}$

donc $1 + \frac{K}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \leq I_n \leq 1 + \frac{K}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ donc $I_n = 1 - \frac{K}{n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.