

PC* PSI DS 7bis (le mercredi 11 février 2026)

durée 3 h - **calculatrices interdites**

- Les solutions devront être rédigés avec **une encre foncée et** présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter ultérieurement).
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction.*
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément **le numéro de la question utilisée**.

Problème 1:

Soit r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_r : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} z^n.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_r(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x \quad (H_r).$$

On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et x un réel strictement positif.

Soit T une variable aléatoire définie sur Ω qui suit la loi de Poisson de paramètre x .

On pose $Z = \frac{T}{x}$.

Q 1 Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Q 2 Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) = 0.$$

Q 3 Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Q 4 Montrer que Z^r admet une espérance et exprimer $E(Z^r)$ à l'aide de $S_r(x)$.

Q 5 Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E(Z^r).$$

On considère la famille $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, H_k = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_k = H_k(T)$.

Dans les trois questions suivantes, N est un entier naturel non nul.

Q 6 Montrer que Y_N est d'espérance finie et $E(Y_N) = x^N$.

Q 7 Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad T^N = \sum_{k=0}^N a_k Y_k.$$

Q 8 En déduire que

$$E(Z^N) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Q 9 On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t^s \leq s(t-1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0, \quad Z^r \leq (1-s) \times Z^N + s \times Z^{N+1}.$$

Q 10 Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) = 1.$$

Q 11 En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$E(Z^r) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé H_r .

Problème 2:

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.

- L'ensemble $C^k(J, \mathbb{R})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J .
- L'ensemble $C^\infty(J, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur J .
- Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, on note

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in J\}.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}e^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C) : \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admet une unique solution $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I. Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C) , on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E) . Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \simeq 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher la solution de (C) , par la solution du problème de Cauchy:

$$(C_\ell) : \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) : (E_\ell) \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Q 12 Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ) , donner son expression et dresser son tableau de variations.

Q 13 Montrer qu'il existe une unique fonction constante solution de l'équation (E_ℓ) . On note $\gamma \in \mathbb{R}$ la valeur prise par cette solution. Vérifier que la solution u obtenue dans la question précédente satisfait

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \gamma.$$

Partie II Une propriétés des solutions de (E)

Soit y une solution de (E) .

Q 14 On suppose que y admet une limite c en $+\infty$.

a Montrer que y' tend vers 0 en $+\infty$.

b En déduire que la fonction constante $x \mapsto c$ est solution de (E) .

Q 15 Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes solutions de (E) dont les valeurs sont de signe opposés.

Dans la suite du problème, on note y l'unique solution de (C) et on admet que y vérifie (comme la fonction u) les propriétés:

- y est décroissante sur $\mathbb{R}_+$,
- La fonction u admet une limite réelle en $+\infty$. On note c cette limite.

Q 16 On note c_1 et c_2 les deux réels tels que les fonctions $x \mapsto c_i$ sont solutions de (E) . Justifier que $c = \min(c_1, c_2)$.

Partie III. Séries de Dirichlet

Dans cette partie on considère deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un réel M vérifiant:

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n},$
- la suite de réels $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante,
- $\lambda_0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n).$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n e^{-\lambda_n x} \end{cases}$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est dite de Dirichlet.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

Q 17 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les réels b_k sont bien définis.

Q 18 Montrer que la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Dans la suite de cette partie, on note f la somme de cette série de fonctions.

Q 19 Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Q 20 Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0 .

Q 21 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f \in C^k(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k .

Q 22 Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie IV. Relations sur les coefficients d'une série de Dirichlet dont la somme vérifie (C)

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Supposons dorénavant que y est la somme d'une somme de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en début de partie II.

On introduit également la fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = e^{y(x)}.$$

Q 23 Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie II.

Q 24 En utilisant l'équation (E) satisfaite par y , calculer b_1 .

On définit une suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par récurrence comme suit:

$$d_0 = 1, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

Q 25 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k$,

Q 26 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y , donner une relation de récurrence liant b_{k+1} , b_k et d_k .

Partie V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R . On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy (F) associé à un système d'équations différentielles non linéaires donné par les relations:

$$(F) : \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \end{cases} \quad S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0,$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0, 1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1

Pour (S_0, I_0, R_0) fixé, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (C^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\tilde{S}_0, \tilde{I}_0, \tilde{R}_0)$, alors

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\tilde{S}_0, \tilde{I}_0, \tilde{R}_0) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq (\tilde{S}(x), \tilde{I}(x), \tilde{R}(x)).$$

Q 27 On suppose $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F) .

Q 28 Montrer que si $S_0 > 0$ alors S est strictement positive.

Q 29 Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème dans le cas où $S_0 = \frac{1}{2}$, $I_0 = \frac{1}{2}$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) = \ln \left(\frac{S(x)}{S_0} \right) = \ln (2S(x)).$$

Q 30 Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C) .

Dans la suite du problème y désigne la somme de la série de Dirichlet définie dans la troisième partie dont on a supposé qu'elle est solution du problème de Cauchy (C) .

On a donc $h = y$.

Pour approcher la solution y de (C) , on introduit, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction $y_N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n e^{-\lambda_n x}.$$

Q 31 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\|y_N - y\|_\infty \leq \frac{M}{2^N},$$

Pour approcher la fonction S , on introduit la fonction $S_N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 e^{y_N(x)} = \frac{1}{2} \exp \left(\sum_{n=0}^N a_n e^{-\lambda_n x} \right).$$

Q 32 Montrer que la suite de fonctions $(S_N)_{N \geq 1}$ converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \|S_N - S\|_\infty \leq \frac{M e^{2M}}{2^{N+1}}.$$

FIN

Problème 1: (extrait réécrit de mines psi 2019)

R 1 On a $Z = \frac{T}{x}$ et T et T^2 sont d'espérance finie donc Z et Z^2 sont d'espérance finie et

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{x} E(T) = 1 \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \\ V(T) &= \frac{1}{x^2} V(T) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

R 2 Comme Z^2 est d'espérance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z - E(Z)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z)}{\varepsilon^2}, \quad \text{ie} \quad P(|Z - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{x\varepsilon^2}.$$

En prenant $\varepsilon = x^{-1/3} > 0$, on a donc :

$$0 \leq P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) \leq \frac{1}{x(x^{-1/3})^2} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) = 0.$$

R 3 On peut utiliser la règle de D'Alembert pour les séries entières ou comme suit, pour les séries numériques:

Pour tout $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n^r}{n!} z^n \neq 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{(n+1)^r n!}{n^r (n+1)!} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \frac{(1+1/n)^r}{n+1} |z| \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \times \frac{1}{n+1} |z| \quad (\text{car } r > 0 \text{ est fixé}) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

donc, comme $0 < 1$, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument.

Ceci étant valable pour tout $z \neq 0$, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ est $+\infty$.

R 4 On a $Z^r = \frac{T^r}{x^r} \geq 0$.

D'après le théorème de transfert, $Z^r \geq 0$ on a

$$E(Z^r) = \sum_{n \in T(\Omega)} \frac{n^r}{x^r} P(T = n) = \frac{e^{-x}}{x^r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$$

D'après la question précédente, la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

La série à termes positifs $\sum \frac{n^r}{n!} x^n$ converge donc Z^r est d'espérance finie et

$$E(Z^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x).$$

R 5 Soit $x > 1$.

• Comme $Z^r \geq 0$ et Z^r admet une espérance finie (question précédente), on a, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0, \quad P(Z^r \geq a) \leq \frac{E(Z^r)}{a}.$$

Or $x > 1$ donc $x^{-1/3} \in]0, 1[$, donc $(1 - x^{-1/3})^r > 0$. En prenant $a = (1 - x^{-1/3})^r$, on obtient

$$P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq \frac{E(Z^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}, \quad \text{ie} \quad (1 - x^{-1/3})^r P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E(Z^r).$$

Enfin, comme $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on a $(Z(\omega))^r \geq (1 - x^{-1/3})^r \Leftrightarrow (Z(\omega)) \geq (1 - x^{-1/3})$, donc on a bien

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) = (1 - x^{-1/3})^r P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E(Z^r).$$

R 6 Si $T(\omega) \in [[0, N - 1]]$ alors $Y_N(w) = 0$ et si $T(\omega) \geq N$ alors $Y_N(w) \geq 0$ donc $Y_N \geq 0$.

D'après le théorème de transfert appliqué à $Y_N = T(T - 1) \dots (T - N + 1) \geq 0$ (sous réserve de convergence)

$$\begin{aligned} E(Y_N) &= \sum_{n \in T(\Omega)} n(n-1) \dots (n-N+1) P(T=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-N+1) \frac{e^{-x} x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-N+1) \frac{e^{-x} x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{e^{-x} x^n}{(n-N)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{j+N}}{j!} \\ &= x^N e^{-x} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = x^N e^{-x} e^x = x^N. \end{aligned}$$

Donc Y_N d'espérance finie et $E(Y_N) = x^N$.

R 7 La famille $(H_0, \dots, H_N)$ est libre (degrés échelonnés) et formée de $N + 1$ éléments de $\mathbb{R}_N[X]$, espace de dimension $N + 1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Par suite, comme $X^N \in \mathbb{R}_N[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que $X^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k$.

En identifiant les coefficients de degré N , on a $a_N = 1$.

On a donc $X^N = \sum_{k=1}^N a_k H_k(X)$ avec $a_N = 1$ donc

En évaluant l'égalité précédente en tout $T(\omega) \in \mathbb{R}$, on a

$$T^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(T) = \sum_{k=0}^N a_k Y_k \quad \text{et} \quad a_N = 1.$$

R 8 Par suite, $Z^N = \frac{T^N}{x^N} = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} Y_k$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(Z^N) &= \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} E(Y_k) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} x^k \quad (\text{d'après la question 6}) \\ &= \frac{1}{x^N} \sum_{k=1}^N a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^N} a_N x^N = a_N = 1 \quad (\text{car } a_N \neq 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(Z^N) = 1$.

R 9 On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N = r - \lfloor r \rfloor$, donc $s \in [0, 1[$.

• Supposons $s \in]0, 1[$.

Posons $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^s - (s(t-1) - 1)$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = st^{s-1} - s = s(t^{s-1} - 1).$$

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	$\parallel$	$+$ 0 $-$	
$f(t)$	$s-1$	0	$-\infty$

Par suite, comme $s - 1 < 0$, on a le tableau de variations suivant :

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq 0$, donc $t^s \leq s(t-1) + 1$.

• Pour tout $x > 0$,

$$Z^r = Z^N Z^s \leq Z^N (s(Z-1) + 1) = (1-s)(Z(\omega))^N + s(Z(\omega))^{N+1}.$$

Ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien :

$$Z^r \leq (1-s)Z^N + sZ^{N+1}.$$

R 10 • On a déjà $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^{-\frac{1}{3}})^r = 1$.

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$ c'est-à-dire, en passant au complémentaire $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 0$.

Si $Z(\omega) < 1 - x^{-\frac{1}{3}}$ alors $Z(\omega) - 1 < -x^{-\frac{1}{3}}$ donc $|Z(\omega) - 1| > x^{-\frac{1}{3}}$ donc $|Z(\omega) - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}}$.

On a donc $(Z < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) \subset (|Z(\omega) - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}})$ donc, d'après la question 4 :

$$0 \leq \mathbb{P}(Z < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) \leq \mathbb{P}(|Z - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}}) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^{-\frac{1}{3}})^r \mathbb{P}(Z \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$$

R 11 • D'après la question 9, par croissance de l'espérance, Z^r admet une espérance et

$$E(Z^r) \leq E((1-s)Z^N + sZ^{N+1}) = (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}) \quad (\text{linéarité de l'espérance}).$$

En combinant cette majoration avec la minoration obtenue en question 5, on a donc

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E(Z^r) \leq (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}).$$

Or, d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$ et, d'après la question 8,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}) = (1-s) + s = 1, \text{ donc, d'après le théorème des gendarmes,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(Z^r) = 1.$$

• Par suite, comme $E(Z^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x)$ d'après la question 4, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x) = 1$, donc

$$S_r(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x : (H_r).$$

Problème 2: (extrait réécrit de mines psi 2025)

Partie I. Linéarisation de (E)

R 12 ► $u' + u + 1 = \frac{1}{2}(1 + u) \Leftrightarrow u' + \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}u'$ qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants sur $\mathbb{R}$ donc le problème de Cauchy (C_ℓ) admet une unique solution.

► Une solution particulière est la fonction constante égale à -1 et les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ où λ décrit $\mathbb{R}$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x} - 1$. On a $u(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0$ donc la solution du problème de Cauchy vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 1$.

► La décroissance de u sur $\mathbb{R}_+$ est évidente, $u(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} u = -1$ donc on a

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	-1

on a le tableau de variations suivant :

R 13 ► Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La fonction constante égale à γ est solution de (E_ℓ) ssi $\gamma + 1 = \frac{1}{2}(1 + \gamma)$ ssi $\gamma = -1$:

l'unique solution constante de (E_ℓ) est -1

► La question précédente montre que l'on a bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \gamma$$

Partie II.

R 14 On suppose que y admet une limite c en $+\infty$.

a ► y est solution de (E) donc $y' + y + 1 = \frac{1}{2}e^y$ donc $y' = \frac{1}{2}e^y - y - 1$.

Comme $\lim_{+\infty} y = c$, on a $\lim_{+\infty} y' = \frac{1}{2}e^c - c - 1$ que l'on note α .

Supposons $\alpha > 0$. Il existe donc x_0 à partir duquel $y'(t) \geq \frac{\alpha}{2}$ et si $x \geq x_0$

alors $f(x) - f(x_0) \geq \int_{x_0}^x f'(t) dt = \frac{\alpha}{2}(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$.

De même, $\alpha < 0$ est impossible donc $\alpha = 0$.

b On a donc $\frac{1}{2}e^c - c - 1 = 0$ donc $x \mapsto c$ est solution de l'équation (E) : $y' = \frac{1}{2}e^y - y - 1$

R 15 ► Une fonction $x \mapsto \gamma$ constante est solution de (E) ssi $\frac{1}{2}e^\gamma - \gamma - 1 = 0$

i.e. $\varphi(\gamma) = 0$ en notant $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}e^t - t - 1$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \frac{1}{2}e^t - 1$. Ce qui donne le tableau de variations suivant (les limites sont faciles, directes ou par croissances comparées) :

t	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
$\varphi'(t)$	+	0	-
$\varphi(t)$	$+\infty$		$+\infty$

et $\varphi(\ln(2)) = -\ln(2) < 0$.

Or φ est continue strictement décroissante sur $] -\infty, \ln(2)]$ donc elle réalise une bijection de $] -\infty, \ln(2)]$ sur $[\varphi(\ln(2)), \lim_{-\infty} \varphi[= [\varphi(\ln(2)), +\infty[$.

Comme $0 \in [\varphi(\ln(2)), +\infty[$, il existe un unique $c_1 \in] -\infty, \ln(2)]$ tel que $\varphi(c_1) = 0$.

On remarque que $\varphi(0) = -\frac{1}{2}$ donc φ est strictement négative sur $[0, \ln(2)]$ donc $c_1 < 0$.

On procède de même sur $[\ln(2), +\infty[$ et on trouve un unique $c_2 \geq \ln(2)$ (donc $c_2 > 0$) tel que $\varphi(c_2) = 0$.

(E) admet exactement deux solutions constantes dont les valeurs vérifient $c_1 < 0 < c_2$.

R 16 La fonction y est décroissant et $y(0) = 0$ donc $c \leq 0$.

Or on a vu que $x \mapsto c$ est solution de (E) donc $c \in \{c_1, c_2\}$ or c_1 et c_2 sont de signes opposés d'après la question précédente donc une seule est négative et est égale à c .

On a donc bien $c = \min(c_1, c_2)$.

Partie III. Séries de Dirichlet

R 17 Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait, par hypothèse, que $a_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ et $\lambda_n = O(n)$ donc $\lambda_n^k a_n = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{n^k}{2^n}\right)$.

Mais $\frac{n^k}{2^n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $\frac{\frac{n^k}{2^n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^{k+2}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées et $\frac{1}{n^2} \geq 0$ donc

la série $\sum \frac{n^k}{2^n}$ converge absolument $\sum \lambda_n^k a_n$ donc converge absolument de sorte que

b_k est bien défini

R 18 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $|f_n(x)| = |a_n| e^{-\lambda_n x} \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$ (indépendant de x)

donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{M}{2^n}$.

La série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge donc absolument donc $\sum \|f_n\|_\infty$ converge donc

La série de fonctions. $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

R 19 (H_1) : Chaque f_n est évidemment continue sur $\mathbb{R}_+$.

(H_2) : La série de fonctions. $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

donc par théorème de continuité de la somme de série de fonction, f est continue sur $\mathbb{R}_+$

R 20 ► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = a_n$ donc $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ donc

$$f(0) = a_0 + b_0$$

► Appliquons le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum f_n$:

(H_1) : Pour $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ donc $f_0 : x \mapsto a_0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = a_0$.

Si $n \geq 1$ alors $\lambda_n > \lambda_0 = 0$ puisque (λ_n) est strictement croissante donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

(H_2) : La série de fonctions. $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = a_0$.

R 21 ► Appliquons le corollaire du théorème de dérivation terme à terme:

(H_1) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ (théorème opérations).

(H_2) : La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ (question 8)

(H_3) : Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions. $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

On montre par récurrence immédiate que pour tout $x \geq 0$, $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x}$ donc

$$\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq \lambda_n^k |a_n|$$

On a vu que $\sum \lambda_n^k |a_n|$ converge donc $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que f est de classe C^∞ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x}.$$

► Soit $k \geq 1$. En évaluant en 0 on a donc

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n = (-1)^k \lambda_0^k a_0 + (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$$

Mais $\lambda_0 = 0$ et $k \geq 1$ donc $\lambda_0^k = 0$ de sorte que

$$f^{(k)}(0) = \boxed{(-1)^k b_k}$$

R 22 Supposons f nulle. Il a été vu que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a_0$ donc $a_0 = 0$.

On a donc pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$. En multipliant par $e^{\lambda_1 x}$ il vient

$$\forall x \geq 0 \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} = 0$$

La suite $(\lambda_n - \lambda_1)_{n \geq 1}$ vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ (nulle en $n = 1$, strictement croissante, tend vers $+\infty$, dominée par n) donc $a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$ donc $a_1 = 0$.

On démontre ainsi par récurrence forte que $\boxed{\text{tous les } a_n \text{ sont nuls}}$

Remarque: On peut aussi supposer qu'il existe k tel que $a_k \neq 0$ et poser $n_0 = \min \{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$, ce qui évite la récurrence.

Partie IV. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

R 23 On utilise la question 20.

Nous avons vu que $y(0) = a_0 + b_0$. Or $y(0) = 0$ donc $b_0 = -a_0$.

Par ailleurs, on sait que $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a_0$ mais par hypothèse, $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c$.

Ainsi, $\boxed{a_0 = c \text{ et } b_0 = -c}$

R 24 D'après (E), $y' = -y - 1 + \frac{1}{2}e^y$. Mais $y(0) = 0$ donc $y'(0) = -\frac{1}{2}$. Mais on a vu que $y'(0) = -b_1$ donc

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

R 25 Montrons le résultat par récurrence forte sur k .

initialisation: On a $d_0 = 1$ et $g(0) = e^0$ donc $(-1)^0 d_0 = g(0)$

hérédité: Soit $k \geq 2$. Supposons $(-1)^i d_i = g^{(i)}(0)$ si $0 \leq i \leq k-1$.

La fonction $g = e^y$ est C^∞ puisque $\exp$ et y le sont et $g' = y'g$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dérive $k-1$ fois cette relation en utilisant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} g^{(k)} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)} g^{k-1-i} \text{ donc en évaluant en } 0 \\ g^{(k)}(0) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)}(0) g^{k-1-i}(0) \end{aligned}$$

On a vu (question 21) que $y^{(i+1)}(0) = (-1)^{i+1}b_{i+1}$ donc :

$$g^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i+1} b_{i+1} (-1)^{k-1-i} d_{k-1-i}$$

Or $d_0 = g(0) = e^0 = 1$ donc en simplifiant les puissances de -1 et en changeant d'indice,

$$(-1)^k g^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i = d_k$$

donc $(-1)^k d_k = g^{(k)}(0)$, ce qui achève la récurrence.

R 26 D'après (E), $y' + y + 1 = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}g$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dérive k fois cette relation et on évalue en 0 (attention, $1^{(k)} = 0$ car $k \geq 1$) :

$$y^{(k+1)}(0) + y^{(k)}(0) = \frac{1}{2}g^{(k)}(0) \text{ donc } (-1)^{k+1}b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k$$

donc

$$b_{k+1} - b_k = -\frac{1}{2}d_k$$

En utilisant conjointement les résultats des deux questions qui précèdent, il est possible de calculer récursivement la suite (b_n) .

Partie V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

R 27 L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} S'(x) + I(x)S(x) = 0 & (\text{linéaire homogène d'ordre 1}) \\ S(0) = 0 \end{cases}$ est la fonction nulle donc $S_0 = 0$ entraîne S est la fonction nulle.

On a alors $\begin{cases} I' = -I \\ R' = I. \end{cases}$ donc pour tout $x \geq 0$, $I(x) = I_0 e^{-x}$ et $\forall x \geq 0$, $R'(x) = I_0 e^{-x}$ donc pour tout $x \geq 0$, $R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$ donc

$$S(x) = 0 \quad I(x) = I_0 e^{-x} \quad R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$$

R 28 On a $S'(x) + I(x)S(x) = 0$ donc pour tout $x \geq 0$, $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt}$.

Comme $S_0 > 0$, S est strictement positive

R 29 La fonction S ne s'annule pas donc

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = \frac{S'^2 - SS''}{S^2} \stackrel{S'=-IS}{=} \frac{I^2 S^2 + S(I'S + IS')}{S^2} \text{ donc}$$

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = I^2 + I' + I \frac{S'}{S} \stackrel{S'=-IS}{=} I^2 + I'^2 = I' \stackrel{I'=IS-I}{=} IS - I \stackrel{S'=-IS}{=} -S' + \frac{S'}{S}$$

ce qui donne bien finalement

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}$$

R 30 On a $h(0) = 0$ et l'on souhaite montrer que $h' + h + 1 = \frac{1}{2}e^h$ i.e. $\frac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$.

D'après ce qui précède, $\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}$. Pour $x \geq 0$, on intègre ceci de 0 à x :

$$\int_0^x \left(-\frac{S'}{S}\right)'(t)dt = -\int_0^x S'(t)dt + \int_0^x \frac{S'(t)}{S(t)}dt \text{ donc } -\frac{S'(x)}{S(x)} + \frac{S'(0)}{S(0)} = -S(x) + S(0) + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)$$

Mais $S(0) = S_0 = \frac{1}{2}$ et $S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4}$ donc

$$-\frac{S'(x)}{S(x)} - \frac{1}{2} = -S(x) + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)$$

ce qui donne bien $\frac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$. Ainsi, $\boxed{h \text{ est solution du problème de Cauchy } (C)}$.

R 31 ► Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|y_N(x) - y(x)| = \left| \sum_{n=0}^N a_n e^{-\lambda_n x} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$$

L'utilisation de l'inégalité triangulaire est légitime car la dernière série converge: vu en question 17 cas $k=0$).
Puis,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = M \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = M \frac{1}{2^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}$$

ce qui donne bien finalement $\|y_N - y\|_{\infty} \leq \frac{M}{2^N}$.

R 32 D'après ce qui précède, $h = y$ donc $S = \frac{1}{2}e^y$. Ainsi, $|S_N(x) - S(x)| = \left|\frac{1}{2}e^{y_N(x)} - \frac{1}{2}e^{y(x)}\right| = \frac{1}{2}|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}|$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à $\exp$ qui est C^1 donne : si $a < b$ alors

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |e^x - e^y| \leq \sup_{t \in [a, b]} (|\exp'(t)|) \times |x - y| \leq e^b |x - y|$$

En reprenant des calculs analogues à ceux de la question précédente, si $x \geq 0$ alors

$$|y(x)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M \text{ et de même } |y_N(x)| \leq 2M.$$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[-2M, 2M]$
ce qui donne $|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}| \leq e^{2M} |y_N(x) - y(x)|$.

Mais on a vu que $\|y_N - y\|_{\infty} \leq \frac{M}{2^N}$ donc, $|S_N(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2}e^{2M} \frac{M}{2^N}$ donc

$$\|y_N - y\|_{\infty} \leq e^{2M} \frac{M}{2^{N+1}}$$

Puisque le majorant tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, on a bien montré que

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (S_N) \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

FIN