

MATHÉMATIQUES

Devoir surveillé n°6 (en PC*) ou n°7 (en PSI) **SUJET STANDARD**

Durée 3h – Calculatrices interdites

*Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**. Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté. Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), **le numéro de cette question devra être mentionné clairement**. Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale. **Les résultats seront encadrés.***

EXERCICE 1

Quelques calculs de $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$ lorsque F est une somme de série de fonctions

Un premier exemple.

Q1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

Q2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F'(x)$.

Un deuxième exemple.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose cette fois $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q3. Soit $a \in]0, 1[$. Prouver la convergence normale de $\sum f_n$ sur le segment $[-a, a]$.
En déduire que F est définie et continue sur $] -1, 1[$.

Q4. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1-x^n}{1-x} \leq n$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$.

Un exemple plus large

Soit f une application réelle continue et croissante sur $[0, 1[$ avec $f(0) = 0$ et telle que la fonction $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0, 1[$. Soit $x \in]0, 1[$.

Q5. Justifier l'existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$ et l'égalité $G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

Q6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement : $\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt$.

Q7. En déduire l'existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de x .

Q8. Conclure avec soin que : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

Un calcul d'intégrale

Q9. Justifier que la fonction $g : u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\int_0^1 u^k \ln(u) du$.

Q11. Grâce au développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ sur $]0, 1[$, et en précisant le théorème

utilisé, justifier que : $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$; on admettra que ceci vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

Un dernier exemple.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

Q12. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme de la somme d'une série de fonctions.

Q13. Grâce à **Q8.** montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1} dv$.

EXERCICE 2

Soit r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_r : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} z^n.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_r(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x \quad (H_r).$$

On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et x un réel strictement positif.

Soit T une variable aléatoire définie sur Ω qui suit la loi de POISSON de paramètre x .

On pose $Z = \frac{T}{x}$.

Q1. Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Q2. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) = 0.$$

Q3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Q4. Montrer que Z^r admet une espérance et exprimer $E(Z^r)$ à l'aide de $S_r(x)$.

Q5. Montrer que pour tout réel $x > 1$,

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E(Z^r).$$

On considère la famille $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définie par

$$H_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, H_k = \prod_{i=0}^k (X - i).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_k = H_k(T)$.

Dans les trois questions suivantes, N est un entier naturel non nul.

Q6. Montrer que Y_N est d'espérance finie et $E(Y_N) = x^N$.

Q7. Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_N$ tels que

$$a_N = 1 \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad T^N = \sum_{k=0}^N a_k Y_k.$$

Q8. En déduire que

$$E(Z^N) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

Q9. On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N$. Montrer l'inégalité

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t^s \leq s(t - 1) + 1,$$

et en déduire

$$\forall x > 0, \quad Z^r \leq (1 - s)Z^N + sZ^{N+1}.$$

Q10. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) = 1.$$

Q11. En combinant les résultats précédents, établir la convergence

$$E(Z^r) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$$

et conclure à la validité de l'énoncé (H_r) .

EXERCICE 3

Calcul d'une racine carrée par la méthode de HÉRON

Cas d'un nombre réel positif

On définit par récurrence la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, +\infty[$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, f_k(x) = \frac{1}{2} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

- Q1.** Pour tout $k \geq 1$ trouver (par récurrence) un équivalent de $f_k(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Q2.** Pour $x > 0$ fixé, on définit la fonction $]0, +\infty[\xrightarrow{h}]0, +\infty[$ par : $h(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{x}{t} \right)$.
- (a) Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[, h(t) \geq \sqrt{x}$.
- (b) Montrer que : $\forall t \geq \sqrt{x}, |h(t) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2} |t - \sqrt{x}|$.
- Q3.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}$.
- Q4.** Montrer la convergence simple de la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser sa limite.
- Q5.** Soit un segment $[a, b] \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ ainsi que sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Cas d'une matrice diagonale positive

Soit un entier $n \geq 1$. On note $\mathcal{D}_n^+$ (resp. $\mathcal{D}_n^{++}$) l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont positifs (resp. strictement positifs).

Soit une matrice $D \in \mathcal{D}_n^+$.

- Q6.** Montrer que pour tout $M \in \mathcal{D}_n^{++}$, on a : $\frac{1}{2}(M + DM^{-1}) \in \mathcal{D}_n^{++}$.

On peut donc définir la suite de matrices $(V_k)_{k \geq 0}$ par récurrence par :

$$V_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, V_k = \frac{1}{2} (V_{k-1} + D(V_{k-1})^{-1}).$$

- Q7.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$ exprimer les coefficients de V_k à l'aide de la fonction f_k .
- Q8.** Montrer que la suite $(V_k)_{k \geq 0}$ converge et montrer que sa limite Δ vérifie $\Delta^2 = D$.
- Q9.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|V_k - \Delta\| \leq \frac{\text{tr}(D) + n}{2^k}$,
où $\|\cdot\|$ désigne la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)}$.

Cas d'une matrice symétrique positive

Soit S une matrice symétrique réelle positive d'ordre n .

- Q10.** Justifier l'existence de la suite de matrices $(U_k)_{k \geq 0}$ telle que :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, U_k = \frac{1}{2} (U_{k-1} + S(U_{k-1})^{-1}).$$

- Q11.** En utilisant la question **Q9.**, montrer que la suite $(U_k)_{k \geq 0}$ converge et montrer que sa limite R est symétrique positive et vérifie $R^2 = S$.

FIN du DEVOIR