

MATHÉMATIQUES

Corrigé du devoir surveillé n°6 **SUJET STANDARD**

SOLUTION DE L'EXERCICE 1 (CCINP PC 2013, ÉPREUVE 2, MORCEAUX CHOISI)

Q1. Calcul de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ et $F'(x)$:

Si $x \in]-1, 1[$, la série géométrique $\sum x^n$ converge et on sait que :

$$\forall x \in]-1, 1[, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \boxed{\frac{x}{1-x}}.$$

Ainsi F est alors dérivable sur $] - 1; 1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, F'(x) = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

Q2. Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F'(x)$:

On en déduit directement de la question précédente :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F'(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^2 F'(x) = 1. \end{array}}$$

Q3. Convergence normale de $\sum f_n$ sur $[-a, a]$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-a, a]$, on a : $\left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| = \frac{|x|^n}{1-x^n}$.

Or, d'une part, on a $|x|^n \leq a^n$ et d'autre part par inégalité triangulaire inverse, on a :

$$|1 - x^n| \geq 1 - |x|^n \geq 1 - a^n \geq 1 - a > 0.$$

Donc par quotient d'inégalités où tout est positif (en minorant le dénominateur), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, a], \left| \frac{x^n}{1-x^n} \right| \leq \frac{a^n}{1-a}.$$

Le majorant ne dépend pas de x et c'est le terme général d'une série (géométrique) convergente,

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

Application à F :

On applique le th. de continuité de la somme d'une série de fonctions à la série de fonction $\sum u_n$

- elle converge uniformément (car normalement) sur tout les segments $[-a, a]$ ($a \in]0, 1[$) ;
- chaque fonction u_n est clairement continue sur $] - 1, 1[$ donc chaque $[-a, a]$.

Donc F est définie et continue sur chaque $[-a, a]$ ($a \in [0, 1]$), donc sur $] - 1; 1[$.

Q4. Relation $\frac{1-x^n}{1-x} \leq n$:

Comme $x \neq 1$ la formule de sommation d'une suite géométrique, donne : $\frac{1-x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

Comme $x \in]0, 1[$, pour tout k entre 0 et $n-1$, on a $x^k \leq 1$ donc, par somme d'inégalité, on a : $\frac{1-x^n}{1-x} \leq n$.

Calcul de $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x)$:

Pour $x \in]0, 1[$, l'inégalité précédente donne : $0 < 1 - x^n \leq n(1-x)$, donc $\frac{x^n}{1-x^n} \geq \frac{x^n}{n(1-x)}$.

par sommation infinie convergente d'inégalités, on en déduit que :
$$F(x) \geq \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x},$$

d'après le développement en série entière usuel (valable sur $] -1, 1[$).

D'où les limites suivantes par th. de minoration : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = +\infty$.

Q5. Existence et valeur de $G(x) = \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$:

Le $\boxed{\text{changement de variable } u = e^{t \ln x} \text{ est licite}}$ car $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant (de dérivée $t \mapsto (\ln x)x^t < 0$), bijectif de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ donc les deux intégrales $\int_0^{+\infty} f(x^t) dt$ et $-\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. Cette dernière converge car $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est supposée intégrable sur $]0, 1[$.

Donc $\boxed{G(x) \text{ existe et } G(x) = -\frac{1}{\ln(x)} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du.}$

Q6. Encadrement $\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt$:

$\boxed{\text{Comme } x \in]0, 1[, \text{ la fonction } t \mapsto x^t \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $[0, 1[$. Or f est croissante sur $[0, 1[$ donc $t \mapsto f(x^t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $t \in [n, n+1]$, on a $f(x^t) \leq f(x^n)$.

Par $\boxed{\text{croissance de l'intégration}}$ en intégrant sur $[n, n+1]$, on obtient : $\boxed{\int_n^{n+1} f(x^t) dt \leq f(x^n).}$

De même si $t \in [n-1, n]$ ($n \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1 \geq 0$), on a $f(x^t) \geq f(x^n)$, d'où $\boxed{f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt.}$

Q7. Existence de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ et encadrement de $F(x)$:

D'après la relation de CHASLES et l'existence de $G(x)$ la série de terme général $\int_{n-1}^n f(x^t) dt$ converge.

Comme f est à valeurs positives, d'après la question précédente, on a : $0 \leq f(x^n) \leq \int_{n-1}^n f(x^t) dt$.

$\boxed{\text{Par théorème de comparaison pour les séries,}}$ on en déduit que la série $\sum f(x^n)$ converge. De plus en sommant l'encadrement de la question précédent de $n = 1$ à $+\infty$, tout converge et on obtient :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x^t) dt \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} f(x^t) dt.}$$

Q8. Relation $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$:

Comme $1-x > 0$, la question ; précédente donne :

$$(1-x) \int_1^{+\infty} f(x^t) dt \leq (1-x)F(x) \leq (1-x) \int_0^{+\infty} f(x^t) dt$$

D'une part, $(1-x) \int_0^{+\infty} f(x^t) dt = (1-x)G(x) = -\frac{1-x}{\ln x} \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

Comme $\ln x \sim_{x \rightarrow 0} x-1$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \int_0^{+\infty} f(x^t) dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

D'autre part, le changement de variable $u = x^t$ donne : $\int_1^{+\infty} f(x^t) dt = -\frac{1}{\ln x} \int_0^x \frac{f(u)}{u} du$.

On sait que $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0, 1[$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{f(u)}{u} du = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

De plus $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{\ln x} = -1$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \int_1^{+\infty} f(x^t) dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

On peut alors conclure avec le théorème d'encadrement que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$.

Q9. La fonction g est intégrable sur $]0, 1[$:

- la fonction g est continue par morceaux sur $]0, 1[$ (car continue par quotient dont dénominateur ne s'annule pas).
- En 0, $g(u) \sim -\ln u$ et $-\ln$ est intégrable en 0 donc g aussi.
- On a $\ln(u) \underset{u \rightarrow 1}{\sim} u - 1$ donc $\lim_{u \rightarrow 1} g(u) = 1$, donc g se prolonge par continuité en 1 et donc g est intégrable en 1.

Finalement g est intégrable sur $]0, 1[$.

Q10. Existence et calcul de $\int_0^1 u^k \ln(u) du$:

Par intégration par parties (les fonctions impliquées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$), on a

$$\int_0^1 u^k \ln(u) du = \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \ln(u) \right]_{u \rightarrow 0}^1 - \frac{1}{k+1} \int_0^1 u^k du = 0 - \frac{1}{(k+1)^2},$$

où le crochet converge en 0 par croissances comparées.

Q11. Relation $\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$:

On applique le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque sur $]0, 1[$ à la série de fonctions $\sum g_k$ définie par $g_k(u) = -u^k \ln(u)$:

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est intégrable sur $]0, 1[$ (cf. question précédente, car elle est de plus de signe constant négatif).
- D'après le cours sur les séries géométriques, la série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ et sa somme, $S : u \mapsto \frac{\ln u}{u-1}$ est continue par morceaux sur $]0, 1[$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^1 |g_k(u)| du = -\int_0^1 u^k \ln(u) du = \frac{1}{(k+1)^2}$ qui est le terme général d'une série (de RIEMANN) convergente.

Donc S est intégrable sur $]0, 1[$ (déjà démontré en **Q9**. d'ailleurs) et que $\int_0^1 S(u) du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(u) du$, soit :

$$\int_0^1 \frac{\ln u}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Q12. La fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et expression de $F'(x)$:

On applique le théorème de dérivabilité sous le signe somme,

pour la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ définie sur $] -1, 1[$ par $u_n(x) = -\ln(1-x^n)$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $] -1, 1[$.

En effet, comme $x \in] -1, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$ donc comme $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on a : $|u_n(x)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |x|^n$.

Or la série géométrique $\sum |x|^n$ converge donc, par comparaison $\sum u_n(x)$ converge absolument.

- La série $\sum u'_n$ converge uniformément (car normalement) sur tout segment $[-a, a]$ ($a \in]0, 1[$).

En effet, pour tout $x \in [-a, a]$, on a : $|u'_n(x)| = \left| \frac{nx^{n-1}}{1-x^n} \right| \leq \frac{na^{n-1}}{1-a}$ (comme en **Q3**).

Or le majorant ne dépend pas de x est c'est le terme général d'une série convergente

car on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$ pour tout $a \in]-1, 1[$.

Donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$, donc sur $] -1, 1[$ et : $\forall x \in]-1, 1[, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}$.

Q13. Relation $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1} dv :$

Par [changement de variable $u = 1 - v$ (licite car affine)], on a : $\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1} dv = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du$.

La fonction $f : u \mapsto -\ln(1-u)$ est continue et croissante sur $[0, 1[$ et vérifie $f(0) = 0$.

De plus $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0, 1[$ car :

- elle est continue sur $]0, 1[$;
- on a $\frac{f(u)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$, donc elle est intégrable en 0 ;
- on a $\frac{f(u)}{u} \underset{u \rightarrow 1}{\sim} -\ln(1-u)$, donc elle est intégrable en 1 par comparaison via le changement de variable $t = 1 - u$ puisque $t \mapsto \ln t$ est intégrable en 0

On peut donc utiliser **Q8**. : $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v-1} dv$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2 (MINES PC PSI 2019 EXTRAIT RÉÉCRIT)

Q1. On a $Z = \frac{T}{x}$ et T et T^2 sont d'espérance finie donc Z et Z^2 sont d'espérance finie et

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{x} E(T) = 1 \text{ (par linéarité de l'espérance)} \\ V(T) &= \frac{1}{x^2} V(T) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Q2. Comme Z^2 est d'espérance finie, on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z - E(Z)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z)}{\varepsilon^2}, \quad \text{ie} \quad P(|Z - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{x\varepsilon^2}.$$

En prenant $\varepsilon = x^{-1/3} > 0$, on a donc :

$$0 \leq P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) \leq \frac{1}{x(x^{-1/3})^2} = \frac{1}{x^{1/3}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(|Z - 1| \geq x^{-1/3}) = 0.$$

Q3. On peut utiliser la règle de D'Alembert pour les séries entières ou comme suit, pour les séries numériques :

Pour tout $z \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n^r}{n!} z^n \neq 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{(n+1)^r n!}{n^r (n+1)!} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \frac{(1+1/n)^r}{n+1} |z| \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \times \frac{1}{n+1} |z| \quad (\text{car } r > 0 \text{ est fixés}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

donc, comme $0 < 1$, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge absolument.

Ceci étant valable pour tout $z \neq 0$, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ est $+\infty$.

Q4. On a $Z^r = \frac{T^r}{x^r} \geq 0$.

D'après le théorème de transfert, $Z^r \geq 0$ on a

$$E(Z^r) = \sum_{n \in T(\Omega)} \frac{n^r}{x^r} P(T = n) = \frac{e^{-x}}{x^r} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$$

D'après la question précédente, la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{n^r}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

La série à termes positifs $\sum \frac{n^r}{n!} x^n$ converge donc Z^r est d'espérance finie et

$$E(Z^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x).$$

Q5. Soit $x > 1$.

• Comme $Z^r \geq 0$ et Z^r admet une espérance finie (question précédente), on a, d'après l'inégalité de Markov :

$$\forall a > 0, \quad P(Z^r \geq a) \leq \frac{E(Z^r)}{a}.$$

Or $x > 1$ donc $x^{-1/3} \in]0, 1[$, donc $(1 - x^{-1/3})^r > 0$. En prenant $a = (1 - x^{-1/3})^r$, on obtient

$$P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq \frac{E(Z^r)}{(1 - x^{-1/3})^r}, \quad \text{ie} \quad (1 - x^{-1/3})^r P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E(Z^r).$$

Enfin, comme $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, on a $(Z(\omega))^r \geq (1 - x^{-1/3})^r \Leftrightarrow (Z(\omega)) \geq (1 - x^{-1/3})$, donc on a bien

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z \geq 1 - x^{-1/3}) = (1 - x^{-1/3})^r P(Z^r \geq (1 - x^{-1/3})^r) \leq E(Z^r).$$

Q6. Si $T(\omega) \in [[0, N - 1]]$ alors $Y_N(\omega) = 0$ et si $T(\omega) \geq N$ alors $Y_N(\omega) \geq 0$ donc $Y_N \geq 0$.

D'après le théorème de transfert appliqué à $Y_N = T(T - 1) \dots (T - N + 1) \geq 0$ (sous réserve de convergence)

$$\begin{aligned} E(Y_N) &= \sum_{n \in T(\Omega)} n(n-1) \dots (n-N+1) P(T = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-N+1) \frac{e^{-x} x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-N+1) \frac{e^{-x} x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{e^{-x} x^n}{(n-N)!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-x} x^{j+N}}{j!} \\ &= x^N e^{-x} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} = x^N e^{-x} e^x = x^N. \end{aligned}$$

Donc Y_N d'espérance finie et $E(Y_N) = x^N$.

Q7. La famille $(H_0, \dots, H_N)$ est libre (degrés échelonnés) et formée de $N + 1$ éléments de $\mathbb{R}_N[X]$, espace de dimension $N + 1$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

Par suite, comme $X^N \in \mathbb{R}_N[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que $X^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k$.

En identifiant les coefficients de degré N , on a $a_N = 1$.

On a donc $X^N = \sum_{k=1}^N a_k H_k(X)$ avec $a_N = 1$ donc

En évaluant l'égalité précédente en tout $T(\omega) \in \mathbb{R}$, on a

$$T^N = \sum_{k=0}^N a_k H_k(T) = \sum_{k=0}^N a_k Y_k \quad \text{et} \quad a_N = 1.$$

Q8. Par suite, $Z^N = \frac{T^N}{x^N} = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} Y_k$ admet une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(Z^N) &= \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} E(Y_k) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{x^N} x^k \quad (\text{d'après la question Q6.}) \\ &= \frac{1}{x^N} \sum_{k=1}^N a_k x^k \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^N} a_N x^N = a_N = 1 \quad (\text{car } a_N \neq 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(Z^N) = 1$.

Q9. On pose $N = \lfloor r \rfloor$ et $s = r - N = r - \lfloor r \rfloor$, donc $s \in [0, 1[$.

• Supposons $s \in]0, 1[$.

Posons $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto t^s - (s(t-1) - 1)$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,

$$f'(t) = st^{s-1} - s = s(t^{s-1} - 1).$$

Par suite, comme $s - 1 < 0$, on a le tableau de variations suivant :

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		+	0 -
$f(t)$	s-1	0	$-\infty$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq 0$, donc $t^s \leq s(t-1) + 1$.

• Pour tout $x > 0$,

$$Z^r = Z^N Z^s \leq Z^N (s(Z-1) + 1) = (1-s)(Z(\omega))^N + s(Z(\omega))^{N+1}.$$

Ceci étant valable pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien :

$$(Z)^r \leq (1-s)(Z)^N + s(Z)^{N+1}.$$

Q10. • On a déjà $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^{-\frac{1}{3}})^r = 1$.

• Montrons que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$ c'est-à-dire, en passant au complémentaire $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 0$.

Si $Z(\omega) < 1 - x^{-\frac{1}{3}}$ alors $Z(\omega) - 1 < -x^{-\frac{1}{3}}$ donc $|Z(\omega) - 1| > x^{-\frac{1}{3}}$ donc $|Z(\omega) - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}}$.

On a donc $(Z < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) \subset (|Z(\omega) - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}})$ donc, d'après la question 4 :

$$0 \leq \mathbb{P}(Z_x < 1 - x^{-\frac{1}{3}}) \leq \mathbb{P}(|Z_x - 1| \geq x^{-\frac{1}{3}}) \rightarrow 0$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - x^{-\frac{1}{3}})^r \mathbb{P}(Z_x \geq 1 - x^{-\frac{1}{3}}) = 1$$

Q11. • D'après la question **Q9.**, par croissance de l'espérance, Z^r admet une espérance et

$$E(Z^r) \leq E((1-s)Z^N + sZ^{N+1}) = (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}) \quad (\text{linéarité de l'espérance}).$$

En combinant cette majoration avec la minoration obtenue en question **Q5.**, on a donc

$$(1 - x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1 - x^{-1/3}) \leq E(Z^r) \leq (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}).$$

Or, d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^{-1/3})^r P(Z_r \geq 1 - x^{-1/3}) = 1$ et, d'après la question **Q7.**,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-s)E(Z^N) + sE(Z^{N+1}) = (1-s) + s = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(Z^r) = 1.$$

• Par suite, comme $E(Z^r) = \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x)$ d'après la question **Q3.**, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^r} S_r(x) = 1$, donc

$$S_r(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^r e^x : (H_r).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3 (CCP PC 2021, EXERCICE 3, RÉÉCRIT)

Q1. Après une étude pour $k = 1$ et $k = 2$ on conjecture le résultat.

Montrons par récurrence sur $k \geq 1$ la relation : $\boxed{f_k(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2^k}}$

- Comme un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré, on a :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2} = \frac{x}{2^1},$$

donc la relation est vraie pour $k = 1$.

- Si la relation est vraie à l'ordre $k - 1 \geq 1$, alors : $f_{k-1}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2^{k-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
donc ce terme est prépondérant sur $\frac{x}{f_{k-1}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{k-1}$, d'où $f_k(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} f_{k-1}(x) = \frac{x}{2^k}$.
Donc la relation est vraie à l'ordre k .

Q2. (a) La fonction h est dérivable et $h'(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t^2}\right)$, donc on a le tableau de variations suivant :

t	0	$\sqrt{x}$	$+\infty$
$h(t)$	$\parallel$	$\searrow \quad \swarrow$ $\sqrt{x}$	

Donc on a bien : $\boxed{\forall t > 0, h(t) \geq \sqrt{x}}$

(b) Si $t \geq \sqrt{x}$, on a $\frac{x}{t^2} \in [0, 1]$, donc $\boxed{|h'(t)| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{t^2}\right) \leq \frac{1}{2}}$,

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a : $\forall t, t' \geq \sqrt{x}, |h(t) - h(t')| \leq \frac{1}{2}|t - t'|$.

D'où le résultat voulu en prenant $t' = \sqrt{x}$.

Q3. Pour $x = 0$, la relation de récurrence est $f_k(x) = \frac{f_{k-1}(x)}{2}$.

On reconnaît une suite géométrique. Donc $f_k(x) = \frac{f_0(x)}{2^k} = \frac{1}{2^k} = \frac{1+x}{2^k}$.

Ainsi on a : $|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) = \frac{1+x}{2^k}$, donc la majoration voulue est une égalité.

Si $x > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après **Q2.** a en prenant $t = f_{k-1}(x) > 0$, on a : $f_k(x) \geq \sqrt{x}$.

Donc dans **Q2.** b on peut prendre $t = f_k(x)$, ce qui donne : $|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2}|f_k(x) - \sqrt{x}|$.

Comme c'est vrai à partir de $k = 1$, par récurrence évidente, on en déduit que :

$$\begin{aligned} |f_k(x) - \sqrt{x}| &\leq \frac{1}{2^{k-1}} |f_1(x) - \sqrt{x}| = \frac{1}{2^{k-1}} \left| \frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x} \right| \\ &= \frac{1}{2^k} (x+1-2\sqrt{x}) \quad \text{car } x+1-2\sqrt{x} = (1-\sqrt{x})^2 \geq 0 \\ &\leq \frac{1}{2^k} (1+x). \end{aligned}$$

Q4. D'après **Q3.**, pour $x \geq 0$ fixé, comme le majorant tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$,

par théorème d'encadrement on obtient que $\boxed{(f_k) \text{ converge simplement vers la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+}$.

Q5. Comme $0 \leq a \leq b$, d'après **Q3.**, on a :

$$\forall x \in [a, b], |f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+b}{2^k}.$$

Le majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Donc la suite (f_k) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[a, b]$.

Par contre il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ car sinon cela serait nécessairement vers la limite simple $x \mapsto \sqrt{x}$. Or d'après **Q1.**, et comme $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ on a :

$$f_k(x) - \sqrt{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2^k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi $\boxed{x \mapsto f_k(x) - \sqrt{x} \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}_+}$, i.e. sa norme $\|\cdot\|_\infty$ n'existe même pas.

- Q6.** On écrit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ et $M = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$.
La matrice M est bien inversible car elle est diagonale à coefficients diagonaux non nuls.
Les formules usuelles de calcul sur les matrices diagonales donnent alors :

$$\frac{1}{2}(M + DM^{-1}) = \text{diag} \left(\frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right), \dots, \frac{1}{2} \left(\mu_n + \frac{\lambda_n}{\mu_n} \right) \right).$$

Or $\frac{1}{2} \left(\mu_i + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) > 0$. Donc $\frac{1}{2}(M + DM^{-1}) \in \mathcal{D}_n^{++}$.

- Q7.** D'après le calcul effectué dans la question précédente, par récurrence évidente sur $k \geq 1$ on obtient que

$$V_k = \text{diag}(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n)).$$

- Q8.** La suite de matrice $(V_k)_{k \geq 0}$ converge si et seulement s'il y a convergence coefficient par coefficient.
Pour les coefficients non diagonaux c'est évident car ils sont constants (nuls).
Et les coefficients diagonaux $f_k(\lambda_i)$ convergent vers $\sqrt{\lambda_i}$ d'après **Q4.** . Ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} V_k = \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_{=\Delta}.$$

Et on a clairement $\Delta^2 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$.

- Q9.** En notant $E_{i,j}$ les matrices élémentaires, d'après **Q7.** puis par inégalité triangulaire généralisée, on a :

$$\begin{aligned} \|V_k - \Delta\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}) E_{i,i} \right\| \leq \sum_{i=1}^n |f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}| \underbrace{\|E_{i,i}\|}_{=1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1 + \lambda_i}{2^k} \quad \text{d'après Q3.} \\ &= \frac{1}{2^k} (\text{tr}(D) + n). \end{aligned}$$

- Q10.** Le problème de définition réside dans l'inversibilité de la matrice U_{k-1} pour pouvoir définir U_k .
D'après le théorème spectral S est diagonalisable en base orthonormée i.e. :

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+, S = PDP^\top,$$

en posant à nouveau $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i sont positifs ou nuls car on a supposé S positive.
Si l'on définit alors la suite (V_k) à partir de D comme dans la partie précédente,

montrons par récurrence sur $k \geq 0$ que : U_k existe et $U_k = PV_k P^\top$.

- La matrice $U_0 = I_n$ existe, et on a : $U_0 = I_n = P I_n P^\top = P V_0 P^\top$.
- Si la relation est vraie à l'ordre $k-1 \geq 0$, alors comme V_{k-1} est inversible (cf. **Q6.**), alors $P V_{k-1} P^\top$ aussi (produit de matrices inversibles), donc $U_k = \frac{1}{2}(U_{k-1} + S(U_{k-1})^{-1})$ existe. Et le calcul donne :

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2}(U_{k-1} + S(U_{k-1})^{-1}) = \frac{1}{2} \left(P V_{k-1} P^\top + P D P^\top (P V_{k-1} P^\top)^{-1} \right) \\ &= P \left(\frac{1}{2} (V_{k-1} + D(V_{k-1})^{-1}) \right) P^\top \quad \text{car } P^\top = P^{-1} \\ &= P V_k P^\top. \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie à l'ordre k .

- Q11.** La convergence de (U_k) s'obtient par limite d'un produit en dimension finie d'après $U_{k-1} = P V_{k-1} P^\top$ et **Q8.** mais ici on demande d'utiliser plutôt **Q9.** .

Pour cela on remarque que pour une matrice orthogonale P et pour toute matrice M on a :

$$\|PMP^\top\|^2 = \text{tr}((PMP^\top)(PMP^\top)^\top) = \text{tr}(PM \underbrace{P^\top P}_{=I_n} M^\top P^\top) = \text{tr}(MM^\top) = \|M\|^2,$$

car deux matrices semblables (puisque $P^\top = P^{-1}$) ont la même trace.

Donc en posant encore $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, avec **Q9.** , on a :

$$\|U_k - P\Delta P^\top\| = \|P(V_k - \Delta)P^\top\| = \|V_k - \Delta\| \leq \frac{\text{tr}(D) + n}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_k = R$ avec $R = P\Delta P^\top$, alors R est clairement symétrique,

et on a bien $R^2 = P\Delta^2 P^\top = PDP^\top = S$.