

Semaines 19

Contenu:

- Espaces vectoriels normés: Espaces vectoriels normés de dimension finie: normes, normes 1, 2 et ∞ dans $\mathbb{K}^p$ et $C([a, b], \mathbb{R})$, normes équivalentes, parties bornées, parties convexes. Les normes d'un ev de dim finie sont équivalentes (admis). Convergence des suites d'un espace vectoriel normé, parties fermées (uniquement la définition séquentielle). Parties denses.
- Séries de fonctions: révision du programme précédent, théorème de la double limite (suites et séries de fonctions) généralisation du th de dérivabilité aux fonctions de classe C^k (suites et séries de fonctions), Convergence uniforme en passant par le critère des séries alternées.
- Intégrales dépendant d'un paramètre.
- complément sur les EVN: partie ouverte, caractérisation par le complémentaire. Image réciproque d'une partie ouverte ou fermée par une fonction continue. pas encore vue.

Questions de cours:

1. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X] = E$, $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on pose $\|P\|_0 = \max_{i \in [1, n]} |a_i|$, $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$. On admet que ces deux égalités définissent des normes de E .
Déterminer une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\|_0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_1 = +\infty$. En déduire que les normes $\|\cdot\|_0$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.
3. Donner la définition d'une partie fermée et d'un point adhérent à une partie.
4. Soit E un espace vectoriel normé et $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$. Montrer que B est une partie fermée et convexe de E .
5. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée non convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. (*) Si f est continue sur $[0, 1]$, montrer que l'égalité $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \sup_{x \in]0, 1[} |f(x)|$.
En déduire que si $\sum |u_n(0)|$ diverge alors la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0, 1[$.
8. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
9. On pose, pour $x \geq 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^n}$. Montrer que S est définie et de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.
10. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x}$ admet une limite réelle en $+\infty$.
11. Prolongement en $x = 1$ du développement en série entière de $\ln(1+x)$ en utilisant la convergence uniforme sans convergence normale.
12. $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
13. $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle du premier ordre.
14. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
15. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et vérifie une équation différentielle du deuxième ordre.
16. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Etudier la limite de F en $+\infty$ par encadrement.
17. $G(x) = \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t^2} dt$. Etudier la limite de G en $+\infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
18. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversibles est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.