

DM 17 pour le 9 mars 2026

Exercice 1: Intégrales de Fresnel

On note :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt \quad \text{et} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-x+i)t^2} dt$$

On admet :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt$ est convergente (on commencera par poser $u = t^2$)
2. Justifier l'existence de I .
3. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
4. On suppose $x > 0$.
 - a Montrer que $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{iu^2/x} du$.
 - b Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{iu^2/x} du$
 - c En déduire un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
5. Montrer que $\forall x > 0, 2 \times (-x + i) \times f'(x) = f(x)$.
6. On introduit la fonction $g(x) = \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt$. Montrer que g est une fonction définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$. Justifier que g est bornée.
7. Soit $x > 0$.
 - a Montrer que $f(x) - f(0) = -4 \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} g(u/\sqrt{x}) du$.
 - b En déduire que f est continue en $x = 0$.
8. Déduire de ce qui précède une expression de $f(x)$ à l'aide de I .
9. Déterminer la valeur de I (intégrale de Fresnel).

Exercice 2: calcul de l'intégrale de Gauss

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (\text{intégrale de Gauss}) , \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt \\ W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx \quad (\text{intégrale de Wallis}) \end{aligned}$$

Etude de la convergence de la suite (I_n)

Q 1 Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente.

Q 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale généralisée I_n est convergente.

Q 3 Justifier que pour tout $a \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1+t^2$.

Q 4 Montrer que la suite (I_n) converge et préciser sa limite (on détaillera les hypothèses du théorème utilisé).

Etude des intégrales de Wallis W_n

Q 5 Montrer que la suite (W_n) converge et préciser sa limite.

Q 6 Calculer W_0 et W_1 . Montrer que la suite (W_n) est décroissante.

Q 7 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire que $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1}$.

Q 8 Montrer que $(n+1)W_n W_{n+1}$ ne dépend pas de n et déterminer sa valeur.

Q 9 En déduire que la suite (nW_n^2) admet une limite et que W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ au voisinage de l'infini.

Q 10 Donner une expression de W_{2n} et W_{2n+1} uniquement à l'aide de factorielles et de puissances.

Lien entre W_n et I_n et valeur de l'intégrale de Gauss

Q 11 Montrer que, pour $n \geq 1$, on a $I_n = \sqrt{n} W_{2n-2}$ (on pourra poser $t = \sqrt{n} \tan(x)$).

Q 12 En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Q 13 En déduire la convergence et la valeur des intégrales généralisées $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ et $K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$.

Exercice 3: Fonction dominante définie par morceaux

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^{1+\frac{1}{n}} e^{-t} dx$.

Q 14 Etudier la convergence de la suite (I_n) .

Problème 2:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{i \in [1,n]} |x_i|$ (on admet que cette égalité définit une norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

Pour tout $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $|||M||| = \max_{i \in [1,n]} \left(\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \right)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété de la norme $||| \cdot |||$

Q 15 Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto |||M||| \end{array} \right.$ définit une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 16 Montrer: $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, |||M \times M' ||| \leq |||M||| \times |||M' |||$.

Q 17 Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\|_\infty \leq |||A||| \times \|X\|_\infty$.

Q 18 Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1 vérifiant $\|AX\|_\infty = |||A|||$.
En déduire que $|||A||| = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty$.

Q 19 Retrouver le résultat de la question 16 à l'aide des deux questions précédentes.

Q 20 Montrer que $sp(A) \subset [-|||A|||, |||A|||]$.

Convergence d'une suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On suppose dans cette partie que $|||A||| < 1$.

On considère $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Q 21 Montrer qu'il existe une unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $X = AX + B$.

On note L l'unique solution de l'équation précédente.

On définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

- $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n + B$.

Q 22 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|X_{n+1} - L\|_\infty \leq |||A||| \times \|X_n - L\|_\infty$.

Q 23 En déduire que la suite (X_n) converge vers L .

Application à la résolution approchée de système linéaire

On pose $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{11} & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} & 1 & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{13} & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ on se propose de donner une valeur approchée

des solutions du système linéaire (S) d'écriture matricielle $M_0 X = B$.

Q 24 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall i \in [[1, n]] \quad |m_{i,i}| > \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |m_{i,j}|$.

Montrer que M est inversible.

Q 25 En déduire que le système linéaire (S) admet une unique solution.

Q 26 Donner une matrice A_0 vérifiant $\begin{cases} |||A_0||| < 1 \\ M_0X = B \Leftrightarrow X = A_0X + B \end{cases}$

Q 27 En utilisant la deuxième partie, écrire un programme python renvoyant le $k^{\text{ième}}$ terme d'une suite (X_n) qui converge vers A (on pourra utiliser l'instruction `dot` de numpy)

Q 28 En utilisant l'instruction `linalg.solve` du module `linalg` de numpy, comparer les résultats donnés par la question précédente à la solution donnée par python/

Remarque La complexité de la méthode de Gauss est en $O(n^3)$ pour la résolution d'un système linéaire de taille n .

Chaque étape de la méthode présentée est de complexité $O(n^2)$. Comme la convergence est très rapide, cette méthode a une meilleure complexité que la méthode de Gauss.

Norme subordonnée (facultatif)

Soit $(E, |||)$ un espace vectoriel de dimension finie.

Q 29 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Justifier l'existence de $\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, On pose $|||f||| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

Q 30 Montrer que $f \mapsto |||f|||$ définit une norme de $\mathcal{L}(E)$.

Q 31 Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq |||f||| \times \|x\|$.

Q 32 Montrer que pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$.

Q 33 On suppose dans cette question que E muni d'un produit scalaire noté $(|)$ et $|||$ est la norme euclidienne associé à ce produit scalaire.

Soit f un endomorphisme autoadjoint de E . Montrer que $|||f||| = \max_{\lambda \in sp(f)} |\lambda|$.

Exercice 1: Intégrales de Fresnel

1. Sous réserve de convergence, on effectue d'abord le changement de variable $u : t \mapsto t^2$ de classe C^1 et strictement croissant puis une intégration par parties. On obtient:

$$\int_1^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} du = \left[\frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}} du \text{ valable car } \left| \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

Or $\left| \frac{\sin(u)}{u\sqrt{u}} \right| \leq \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ donc $u \mapsto \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}}$ est une fonction intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{4u\sqrt{u}} du$ converge donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \cos t^2 dt$ converge.

2. La fonction $t \mapsto \cos(t^2)$ est paire donc l'intégrale $\int_{-\infty}^1 \cos(t^2) dt$ converge.

Or $t \mapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[-1, 1]$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t^2) dt$ converge.

On montre de même que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge donc l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.

3. On a $f(0) = I$ qui est bien définie.

Soit $x > 0$. Notons $h(x, t) = e^{(-x+i)t^2} = e^{-xt^2} \cdot e^{it^2}$.

La fonction définie par $t \mapsto e^{-xt^2} = |h(x, t)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc

l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x, t) dt$ est absolument convergente et par parité $\int_{-\infty}^0 h(x, t) dt$.

Ce qui montre que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.

On remarque que $f(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t^2} dt$. On a $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = -t^2 h(x, t)$. La domination :

$$\forall a > 0, \forall x \in [a, +\infty[, \forall t \geq 0, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq t^2 e^{-at^2}$$

permet (rédiger les détails) d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme.

On en déduit que f est de classe C^1 sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ où $a > 0$, donc que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Avec:

$$\forall x > 0, f'(x) = -2 \int_0^{+\infty} t^2 h(x, t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{(-x+i)t^2} dt.$$

4. Soit $x > 0$.

a La fonction $t \mapsto \sqrt{x}t$ est affine donc de classe C^1 et induit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ dans l'intégrale définissant $f(x)$. On en déduit que $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{iu^2/x} du$.

Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu avec $h(x, u) = e^{-u^2} e^{iu^2/x}$:

(H₁) : $t \mapsto h(x, u)$ est continue donc CPM sur $[0, +\infty[$

(H₂) : On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, u) = e^{-u^2}$.

(H₃) : $|h(x, u)| = e^{-u^2} \leq e^{-u^2} = \varphi(u)$ et φ intégrable sur $[0, +\infty[$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h(x, u) du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} e^{iu^2/x_n} du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

c On déduit $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.

5. Soit $x > 0$. On a :

$$-2(-x+i)f'(x) = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \left[2(-x+i)te^{(-x+i)t^2} \right] .dt = \int_{\mathbb{R}} t \cdot \left[e^{(-x+i)t^2} \right]' .dt$$

Une intégration par parties donne

$$-2(-x+i)f'(x) = \left[te^{(-x+i)t^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{(-x+i)t^2} .dt = -f(x)$$

car $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| te^{(-x+i)t^2} \right| = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| te^{-xt^2} \right| = 0$. On a donc

$$\forall x > 0, 2(-x+i)f'(x) = f(x).$$

6. Le "reste" d'une intégrale impropre convergente existe donc $g(x)$ est défini et de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Par ailleurs : $\forall x \geq 0, g(x) = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt - \int_0^x e^{it^2} dt$. et la fonction $t \mapsto e^{it^2}$ est continue donc $x \mapsto \int_0^x e^{it^2} dt$ en est une primitive donc g est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = -e^{ix^2}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow |g(x)| < 1$. La fonction g est continue sur $[0, A]$ donc bornée sur le segment $[0, A]$. Elle est donc bornée sur $[0, +\infty[$.

7. Soit $x > 0$.

a Puisque $f(0) = I = 2 \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$:

$$f(x) - f(0) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{it^2} (e^{-xt^2} - 1) .dt = -2 \cdot \int_0^{+\infty} g'(t) (e^{-xt^2} - 1) .dt;$$

Une IPP, puis le changement de variable $t\sqrt{x} = u$ donne:

$$\forall n, f(x) - f(0) = -4x \int_0^{+\infty} te^{-x_n t^2} g(t) dt = -4 \int_0^{+\infty} ue^{-u^2} g(u/\sqrt{x}) du.$$

b On applique alors le théorème de convergence dominée à paramètre continu avec $h(x, u) = ue^{-u^2} g(u/\sqrt{x})$:

- CPM OK

- On a $\lim_{x \rightarrow 0} h(x, u) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

- Domination $|h(x, u)| \leq Mue^{-u^2}$ avec $M = \sup_{\mathbb{R}^+} |g|$ et $u \mapsto ue^{-u^2}$ est intégrable (car $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right) = 0$)

On obtient ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - f(0) = 0$.

8. L'équation différentielle obtenue à la question 4 est de la forme $y'(x) + \frac{1}{2(x-i)}y(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

On pose $a(x) = \frac{1}{2(x-i)} = \frac{x+i}{2(x^2+1)}$ de primitive $A(x) = \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x)$ donc $\forall x > 0$,

$f(x) = \lambda e^{-A(x)} = \lambda (x^2+1)^{\frac{-1}{4}} e^{-\frac{i}{2} \arctan(x)}$. La fonction f est continue en 0 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda = f(0) = I$

donc : $\forall x \in [0, +\infty[, f(x) = I \cdot (x^2+1)^{\frac{-1}{4}} e^{-\frac{i}{2} \arctan(x)}$.

9. On a vu à la question 4 que: $f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$ au voisinage de $+\infty$. Le résultat de la question précédente montre

qu'au voisinage de $+\infty$: $f(x) \sim \frac{I}{\sqrt{x}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que:

$$I \stackrel{=}{=} \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Remarque: on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2).dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2).dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Exercice 2

Première partie: calcul de l'intégrale de Gauss

R 1 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$. De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ (C.C) donc $e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$. l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

R 2 Ici n est fixé. La fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et $f_n(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{n}\right)^n} = \frac{K}{t^{2n}}$ avec $K = n^n$ Or $n \geq 1$ donc $t \mapsto \frac{K}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale généralisée I_n est convergente.

R 3 D'après la formule du binôme $(1+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k$ or $a \geq 0$ donc $(1+a)^n \geq \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} a^k = 1 + na$. On a donc $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1 + t^2$.

R 4 Appliquons le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$:

- Soit $t > 0$ fixé. $f_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)}$. Or $-n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) = -n \times \left(\frac{t^2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = -t^2 + o_{n \rightarrow +\infty}(t^2) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -t^2$ donc, par composition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t^2} = f(t)$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $]0, +\infty[$.

- Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- Domination: $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1 + t^2 > 0$ donc $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$. Or $\frac{1}{1+t^2} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2}$ donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.

On en déduit que la suite (I_n) converge vers I .

R 5 Posons $g_n(t) = \cos^n(t)$ pour $t \in]0, 1]$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0 = g(t)$, les fonctions g_n et g sont continues par morceaux sur $]0, 1]$ et $|g_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1]$ donc (th de CV dominée) la (W_n) converge vers $\int_0^1 0 dt = 0$.

Remarque: on peut appliquer le théorème au choix sur $[0, 1]$ ou sur $]0, 1]$. Si on choisit de le faire sur $[0, 1]$, la fonction limite est seulement continue par morceaux.

R 6 On obtient $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$. De plus si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$ et donc $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. La suite (W_n) est décroissante.

R 7 Par IPP dans $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x) dx$ avec $u(x) = \cos^{n+1}(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$, on obtient que

$$W_{n+2} = [-\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \sin^2(x) dx \text{ d'où}$$

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \sin^2(x) dx = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) (1 - \cos^2(x)) dx \text{ donc } W_{n+2} = (n+1) (W_n - W_{n+2}).$$

On en déduit que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. Or $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ donc $\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$ et $\frac{n+1}{n+2} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1}$.

R 8 D'après ce qui précède, $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ donc $(n+1)W_nW_{n+1}$ ne dépend pas de n et $(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

R 9 D'après b, $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1}$ donc $\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)W_n^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2$ donc la suite (nW_n^2) converge vers $\frac{\pi}{2}$ donc $W_n^2 \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n}$ et $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

R 10 On sait que pour tout n , $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ donc $W_2 = \frac{1}{2}W_0, W_4 = \frac{3}{4}W_2, \dots, W_{2n} = \frac{2n-1}{2n}W_{2n-2}$ donc $W_{2n} = \frac{(2n-1) \times \dots \times 3 \times 1}{(2n) \times \dots \times 4 \times 2}W_0$ donc

$$W_{2n} = \frac{((2n-1) \times \dots \times 3 \times 1) \times ((2n) \times \dots \times 4 \times 2)}{((2n) \times \dots \times 4 \times 2)^2}W_0 \quad W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n \times \dots \times 2 \times 1)^2}W_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$
 On montre de même que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n} \times (n!)^2}{(2n+1)!}$.

R 11 Commençons par rappeler que si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$. On a donc $W_{2n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2(x))^{n-1}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + \tan^2(x))^n} (1 + \tan^2(x))dx$. Soit la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $t(x) = \sqrt{n} \tan(x)$. La fonction t est une bijection strictement monotone de classe C^1 de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$ et $t'(x) = \sqrt{n}(1 + \tan^2(x))$ donc $W_{2n-2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n} \frac{1}{\sqrt{n}}dt$ et donc $I_n = \sqrt{n}W_{2n-2}$.

R 12 $I_n = \sqrt{n}W_{2n-2}$. Or $W_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2n-2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n) = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

R 13 Avec le changement de variable $u(t) = \sqrt{t}$, on trouve que $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = 2I$ (fait en cours).

Sous réserve de convergence, $K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}dt = \left[\frac{1}{2}te^{-t^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ (IPP $\left\{ \begin{array}{ll} u(t) = \frac{-1}{2}e^{-t^2} & v(t) = t \\ u'(t) = te^{-t^2} & v'(t) = 1 \end{array} \right.$).

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t^2} = 0$ (CC) et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge donc l'intégrale K est convergente et $K = \frac{I}{2}$.

Exercice 3: Fonction dominante définie par morceaux

R 14 Deux possibilités: étudier l'existence, pour n fixé de I_n et appliquer ensuite le théorème de convergence dominée ou appliquer directement le théorème de convergence dominée dont la conclusion 1 donne l'existence des I_n .

Posons $f_n : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{1+\frac{1}{n}}e^{-t} \end{cases}$.

(H_1) : CV simple: Soit $t \geq 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^{1+\frac{1}{n}} = t$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = te^{-t}$.

La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers $f : t \mapsto te^{-t}$ sur $[0, +\infty[$.

(H_2) : continuité de f_n et f (découle des théorème sur les opérations sur fonctions continues).

(H_3) : Domination

On a $n \geq 1$ donc $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ donc $1 \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$.

On en déduit que si $t \in [0, 1]$, $0 \leq t^{1+\frac{1}{n}} \leq t$ et si $t > 1$ alors $0 \leq t^{1+\frac{1}{n}} \leq t^2$

$$\text{Posons } \varphi(t) = \begin{cases} te^{-t} & \text{si } t \in [0, 1] \\ t^2 e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}.$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si $t > 1$, $\frac{\varphi(t)}{1/t^2} = t^4 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$

donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

On en déduit que

(C1) : pour tout n , f_n est intégrable et f sont intégrables.

(C2) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$ (calcul par IPP en dérivant t)

Problème:

Propriété de la norme $||| \quad |||$

R 15 (1) : Soit $i \in [[1, n]]$. En utilisant l'inégalité triangulaire Pour tout i ,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq |||A||| + |||B|||.$$

Cela étant vrai pour tout i , $|||A + B||| = \max_{i \in [[1, n]]} \left(\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \right) \leq |||A||| + |||B|||$

(2) : De même $\sum_{j=1}^n |\lambda a_{i,j}| \leq |\lambda| \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est vraie pour tout i donc $|||\lambda A||| = |\lambda| |||A|||$

(3) : $|||A||| \geq 0$ est immédiat.

Si $|||A||| = 0$ alors pour tout i , $0 \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq 0$ donc $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = 0$ donc (somme de termes positifs) $\forall j, |a_{i,j}| = 0$

La matrice A est donc nulle.

R 16 Posons $P = M \times M'$. Soit $i \in [[1, n]]$.

$$\text{On a } \sum_{j=1}^n |p_{i,j}| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n m_{i,k} m'_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |m_{i,k} m'_{k,j}| = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,k} m'_{k,j}| = \sum_{k=1}^n |m_{i,k}| \sum_{j=1}^n |m'_{k,j}|$$

$$\text{donc } \sum_{j=1}^n |p_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |m_{i,k}| |||M'||| = |||M'||| \times \sum_{k=1}^n |m_{i,k}| \leq |||M||| \times |||M'|||.$$

Cette inégalité est vraie pour tout i donc vraie pour le max donc $|||M \times M'||| \leq |||M||| \times |||M'|||$.

$$\textbf{R 17} \text{ Posons } AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ On a } |y_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \|X\|_\infty \leq |||A||| \times \|X\|_\infty.$$

Cette inégalité est vraie pour tout i donc vraie pour $\max_{i \in [[1, n]]} |y_i|$ donc $\|AX\|_\infty \leq |||A||| \times \|X\|_\infty$.

R 18 • On a $|||A||| = \max_{i \in [[1, n]]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$ donc il existe i_0 tel que $|||A||| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$.

$$\text{Prenons } X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \text{ avec } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \text{ donc } \|X\|_\infty = 1 \text{ et posons } AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } y_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \text{ donc } \|AX\|_\infty \geq |y_{i_0}| = |||A|||.$$

Par ailleurs $\|AX\|_\infty \leq |||A||| \times \|X\|_\infty = |||A|||$ d'après la question précédente. On a donc $\|AX\|_\infty = |||A|||$.

• Si $\|X\|_\infty \leq 1$, alors $\|AX\|_\infty \leq |||A||| \times \|X\|_\infty = |||A|||$ donc

l'ensemble des $\|AX\|_\infty$ avec $\|X\|_\infty \leq 1$ est borné et $\sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty \leq \|A\|$.

d'après la question précédente, il existe X de norme 1 pour lequel $\|AX\|_\infty = \|A\|$

donc $\sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty \leq \|A\|$.

On a donc $\sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1} \|AX\|_\infty = \|A\|$ (et le sup est un max).

R 19 Si $\|X\|_\infty \leq 1$, alors

$$\|(M \times M')X\|_\infty = \|M \times (M'X)\|_\infty \leq \|M\| \times \|M'X\|_\infty \leq \|M\| \cdot \|M'\| \times \|X\|_\infty = \|M\| \cdot \|M'\|.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout X de norme 1, on a $\sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1} \|(M \times M')X\|_\infty \leq \|M\| \times \|M'\|$

donc d'après la question précédente, $\|M \times M'\| \leq \|M\| \times \|M'\|$.

R 20 Soit $\lambda \in \text{sp}(A)$ et X un vecteur propre de A . On a $AX = \lambda X$

donc $\begin{cases} \|AX\|_\infty = |\lambda| \times \|X\|_\infty \\ \|AX\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty \text{ vu précédemment} \end{cases}$ donc, $|\lambda| \times \|X\|_\infty \leq \|A\| \times \|X\|_\infty$ et
comme $X \neq 0$, $\|X\|_\infty > 0$ donc $|\lambda| \leq \|A\|$ donc $\lambda \in [-\|A\|, \|A\|]$ d'où le résultat.

Convergence d'une suite de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

R 21 On a $X = AX + B \Leftrightarrow (I_n - A)X = B \Leftrightarrow (A - I_n)X = -B$.

Or $\|A\| < 1$ et toute valeur propre λ de A vérifie (question précédente) $\lambda \leq \|A\|$

donc 1 n'est pas valeur propre de A donc $A - I_n$ est inversible donc

il existe une unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $(A - I_n)X = -B$ soit $X = AX + B$.

R 22 On a $\begin{cases} L = AL + B \\ X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$ donc, en soustrayant les deux égalités, $X_{n+1} - L = A(X_{n+1} - L)$ donc
 $\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq \|A\| \times \|X_{n+1} - L\|_\infty$.

R 23 Montrons par récurrence sur n que $\|X_n - L\|_\infty \leq \|A\|^n \|X_0 - L\|_\infty$.

Le cas $n = 0$ est immédiat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\|X_n - L\|_\infty \leq \|A\|^n \|X_0 - L\|_\infty$.

On a donc $\|X_{n+1} - L\|_\infty \leq \|A\| \times \|X_n - L\|_\infty \leq \|A\| \times \|A\|^n \|X_0 - L\|_\infty \leq \|A\|^{n+1} \|X_0 - L\|_\infty$ ce qui achève la récurrence.

On a $\|A\| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A\|^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|X_n - L\|_\infty = 0$ donc (X_n) converge vers L .

Application à la résolution approchée de système linéaire

R 24 Montrons que $\ker(M) = \{0\}$. Soit $X \in \ker(M)$. Supposons $X \neq 0$ et $i \in [1, n]$ tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$.

La $i^{\text{ème}}$ ligne de l'égalité $MX = 0$ donne $\sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j = 0$ soit $m_{i,i}x_i = -\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} m_{i,j}x_j$

$$\text{donc } |m_{i,i}x_i| = \left| -\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} m_{i,j}x_j \right| = \left| \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} m_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |m_{i,j}x_j| \leq \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |m_{i,j}| |x_j|$$

$$\text{donc } |m_{i,i}x_i| \leq |x_i| \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |m_{i,j}| < |x_i| |m_{i,i}| \text{ ce qui est absurde}$$

donc tout $X \in \ker(M)$ est nul donc M est inversible.

R 25 La matrice M_0 vérifie la condition $\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |m_{i,j}| < |m_{i,i}|$ pour tout i donc est inversible

donc (S) admet une unique solution.

R 26 On a $M_0 X = B \Leftrightarrow X + (M_0 - I_6) X = B \Leftrightarrow X = A_0 X + B$ avec $A_0 = I_6 - M_0$.

En sommant les valeurs absolues des coefficients de chaque ligne de A_0 , on vérifie que $|||A_0||| \leq \frac{1}{2} < 1$.

R 27 Pas encore corrigé En utilisant la deuxième partie, écrire un programme python renvoyant le $k^{ième}$ terme d'une suite (X_n) qui converge vers A (on pourra utiliser l'instruction `dot` de numpy)

R 28 Pas encore corrigé En utilisant l'instruction `linalg.solve` du module `linalg` de numpy, comparer les résultats donnés par la question précédente à la solution donnée par python/

Remarque La complexité de la méthode de Gauss est en $O(n^3)$ pour la résolution d'un système linéaire de taille n .

Norme subordonnée

Soit $(E, |||)$ un espace vectoriel de dimension finie.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, On pose $|||f||| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|f(x)\|$.

R 29 E est de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$ donc f est continue.

La norme est continue donc $\varphi : x \mapsto \|f(x)\|$ est continue.

La boule unité fermée $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$ est fermée (exo de cours) et bornée.

Le théorème des bornes atteintes entraîne l'existence d'un maximum (donc d'un sup) de φ sur B , ce qui montre l'existence de $|||f|||$.

R 30 C'est exactement la même démarche que pour montrer que la norme infinie d'une fonction est une norme.

La seule différence est dans $|||f||| = 0 \implies f = 0$.

On a $|||f||| = 0 \implies f|_{\{x \in E, \|x\| \leq 1\}} = 0$.

Si $\|x\| \geq 1$ alors $\frac{1}{\|x\|}x$ est de norme 1 et d'image nulle donc $f(x) = 0_E$ par linéarité donc f est nulle.

R 31 Si x est non nul alors $\frac{1}{\|x\|}x$ est de norme 1 donc $\left\|f\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\| \leq |||f|||$ donc, par linéarité, $\|f(x)\| \leq |||f||| \times \|x\|$ (qui est aussi vrai pour $x = 0_E$).

R 32 Si $\|x\| \leq 1$ alors $\|f(g(x))\| \leq |||f||| \times \|g(x)\| \leq |||f||| \times \|g\|$. vrai pour tout x tel que $\|x\| \leq 1$ donc $\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} \|f \circ g(x)\| \leq |||f||| \times |||g|||$ soit $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$.

R 33 Exercice de la feuille sur les espaces euclidiens (On applique le théorème spectral et on majore, si $\|x\| \leq 1$, le réel $\|f(x)\|^2$ (après avoir utilisé le th de pythagore) par $\max_{\lambda \in sp(f)} |\lambda|^2$).

$$\begin{aligned}
M &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{11} & 1 & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{10} & 1 & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} & 1 & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{13} & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}, \\
M^1 &= \begin{pmatrix} 1.0144 & -8.7701 \times 10^{-2} & -8.1459 \times 10^{-2} & -6.0377 \times 10^{-2} & -5.5417 \times 10^{-2} & -5.2973 \times 10^{-2} \\ 0.11740 & 1.0019 & -6.7044 \times 10^{-2} & -8.2068 \times 10^{-2} & -5.4008 \times 10^{-2} & -9.1415 \times 10^{-2} \\ -9.6241 \times 10^{-2} & -8.6758 \times 10^{-2} & 1.0208 & -5.2665 \times 10^{-2} & -4.3254 \times 10^{-2} & -6.3433 \times 10^{-2} \\ -4.2945 \times 10^{-2} & 9.8698 \times 10^{-2} & -0.10598 & 1.0192 & -8.9101 \times 10^{-2} & -9.0317 \times 10^{-2} \\ -0.10313 & -0.11530 & 0.11780 & -8.3751 \times 10^{-2} & 1.0062 & 9.9127 \times 10^{-2} \\ -0.08784 & -5.9411 \times 10^{-2} & -7.2942 \times 10^{-2} & -7.6807 \times 10^{-2} & -7.8412 \times 10^{-2} & 1.0167 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} &: \begin{pmatrix} -0.24181 \\ 0.77327 \\ 1.9851 \\ 2.9259 \\ 5.3104 \\ 4.9754 \end{pmatrix} : \\
A &= - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} & \frac{1}{15} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{15} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{13} & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} 0.58217 \\ 1.7758 \\ 2.5795 \\ 3.7064 \\ 4.9231 \\ 5.5397 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} 0.58217 \\ 1.7758 \\ 2.5795 \\ 3.7064 \\ 4.9231 \\ 5.5397 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} -0.46896 \\ 0.71220 \\ 1.7248 \\ 2.8617 \\ 5.1884 \\ 4.7273 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} -0.46896 \\ 0.71220 \\ 1.7248 \\ 2.8617 \\ 5.1884 \\ 4.7273 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} -0.18076 \\ 0.80658 \\ 2.046 \\ 2.9983 \\ 5.2928 \\ 5.0434 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} -0.180\,76 \\ 0.806\,58 \\ 2.046 \\ 2.998\,3 \\ 5.292\,8 \\ 5.043\,4 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} -0.259\,88 \\ 0.763\,25 \\ 1.966\,0 \\ 2.913\,5 \\ 5.308\,3 \\ 4.956\,4 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} -0.259\,88 \\ 0.763\,25 \\ 1.966\,0 \\ 2.913\,5 \\ 5.308\,3 \\ 4.956\,4 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} -0.236\,6 \\ 0.775\,98 \\ 1.990\,4 \\ 2.930\,4 \\ 5.310\,5 \\ 4.981\,3 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} -0.236\,6 \\ 0.775\,98 \\ 1.990\,4 \\ 2.930\,4 \\ 5.310\,5 \\ 4.981\,3 \end{pmatrix} + B &= \begin{pmatrix} -0.243\,33 \\ 0.772\,52 \\ 1.983\,4 \\ 2.924\,7 \\ 5.310\,6 \\ 4.974 \end{pmatrix} \quad \text{à comparer avec} \quad \begin{pmatrix} -0.241\,81 \\ 0.773\,27 \\ 1.985\,1 \\ 2.925\,9 \\ 5.310\,4 \\ 4.975\,4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -0.417\,83 \\ -0.224\,24 \\ -0.420\,51 \\ -0.293\,59 \\ -7.692\,3 \times 10^{-2} \\ -0.460\,26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} -0.417\,83 \\ -0.224\,24 \\ -0.420\,51 \\ -0.293\,59 \\ -7.692\,3 \times 10^{-2} \\ -0.460\,26 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0.121\,72 \\ 6.370\,9 \times 10^{-2} \\ 0.127\,32 \\ 0.105\,29 \\ -1.375\,4 \times 10^{-3} \\ 0.131\,13 \end{pmatrix} \\
A \begin{pmatrix} 0.121\,72 \\ 6.370\,9 \times 10^{-2} \\ 0.127\,32 \\ 0.105\,29 \\ -1.375\,4 \times 10^{-3} \\ 0.131\,13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3.535\,6 \times 10^{-2} \\ -1.882\,4 \times 10^{-2} \\ -3.663\,7 \times 10^{-2} \\ -2.863\,8 \times 10^{-2} \\ -8.486\,4 \times 10^{-4} \\ -3.807\,4 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} -3.535\,6 \times 10^{-2} \\ -1.882\,4 \times 10^{-2} \\ -3.663\,7 \times 10^{-2} \\ -2.863\,8 \times 10^{-2} \\ -8.486\,4 \times 10^{-4} \\ -3.807\,4 \times 10^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.020\,3 \times 10^{-2} \\ 5.349\,6 \times 10^{-3} \\ 1.060\,6 \times 10^{-2} \\ 8.386\,2 \times 10^{-3} \\ 1.520\,6 \times 10^{-4} \\ 1.098\,5 \times 10^{-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$