

DM 18 pour le 16 mars 2026

Exercice 1 On pose, pour x réel, $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xF(x)$.
3. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : 2y'(x) + xy(x) = 1$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose la série entière de rayon $R > 0$.
 - (a) A quelle condition sur les coefficients a_n la fonction g vérifie-t-elle l'équation $(\mathcal{E})$ sur $] -R, R[$.
 - (b) On suppose que g vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Exprimer a_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser ce développement.

Problème

Notations

On note :

$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g .

I Généralités

Q 1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a Montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

b Justifier que $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

Q 2 Soit $(f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2$.

Montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \times \|g\|_2$.

Q 3 Dans cette question, l'espace $C_b(\mathbb{R})$ est supposé muni de la norme $\|u_n\|_\infty$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application $\phi : \begin{cases} C_b(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}) \\ g \mapsto f * g \end{cases}$.

Montrer que ϕ est linéaire et continue.

Q 4 Soient $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x . Montrer que $f * g = g * f$.

II Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

Q 5 Montrer que $f * g$ est continue.

Q 6 Montrer que si g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Q 7 Soit k un entier naturel non nul.

On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k , sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et montrer que $(f * g)^{(p)} = f * g^{(p)}$.

Q 8 On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2 + e^{it}}$.

a Déterminer une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}$.

b En déduire une famille $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n e^{inx}$.

III Un pas vers le théorème de Stone Weierstrass

Pour tout entier naturel n , on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{(1 - t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$$

Q 9 Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt \leq 2(1 - \varepsilon^2)^n + 2\varepsilon$.

Q 10 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt = 0$.

On considère $f : -\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport $K > 0$.

On suppose que $\forall t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], f(t) = 0$.

Q 11 $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Q 12 Montrer que la suite de fonction $(f * h_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On peut, en affinant ce qui a été fait dans cette partie, montrer le théorème de Stone Weierstrass: Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.