

Semaines 19 20

Contenu:

- Intégrales dépendant d'un paramètre.
- complément sur les EVN: partie ouverte, caractérisation par le complémentaire. Image réciproque d'une partie ouverte ou fermée par une fonction continue.
- Fonctions de plusieurs variables (début): continuité, utilisation des applications partielles pour montrer qu'une fonction n'est pas continue. définition de la dérivée partielle, DL ordre 1 et 2, Th de Schwarz (ces 3 résultats sont admis). Recherche d'extrémum local: points critiques, th des bornes atteintes, Hessienne
- **Révisions: algèbre linéaire, espaces préhilbertiens.**

Questions de cours:

1. $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
4. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et vérifie une équation différentielle du deuxième ordre.
5. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Etudier la limite de F en $+\infty$ par encadrement.
6. $G(x) = \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t^2} dt$. Etudier la limite de G en $+\infty$ en utilisant le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
7. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversibles est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. Montrer que l'application définie par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
9. On pose $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$. Etudier l'existence de limite de g en $(0, 0)$ (on considérera $t \rightarrow f(t, t)$).
10. Etudier les extremums locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction: $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3$ par le calcul explicite de $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$.
11. Etudier les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction: $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - x^3$ à l'aide de la Hessienne.
12. Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = xy(1 - x - y)$. Justifier que f admet un maximum sur T et déterminer ce maximum.