

Sujet de révision pour les écrits

Fonction Zéta, Fonction Gamma, Enoncé

Fonction Zéta

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$.

Soit la fonction $\zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Q1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ .

Q2. Soit $a \in]1, +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$.

Qu'en déduit-on sur la fonction ζ ?

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1, +\infty[$, calculer $f_n^{(k)}(x)$.

(b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 1$, donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ sous forme d'une somme de série.

Q4. Préciser le sens de variation de ζ .

Q5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$ - sans utiliser le théorème de la double limite.

(a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2, 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.

6. On considère à présent $h \in]0, +\infty[$.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$.

En déduire un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 .

Q7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ .

Q8. On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

(a) Justifier que F est bien définie.

(b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que : $\forall x \in]1, +\infty[, \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

(d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Fonction Gamma

Q1. Montrer que, pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note alors : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt$.

Q2. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Q3. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

On admet que, de même, Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt$$

Q4. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma''(x) > 0$.

Q5. Etablir l'existence d'un réel $\theta \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

Q6. Donner le tableau de variation de Γ .

Q7. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

Donner l'allure de la courbe représentative de Γ .

Q8. Pour tout $x > 0$, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$.

On pourra utiliser $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

Q9. Montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\Gamma(x) \times \zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$.

Q10 Justifier que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sujet de révision pour les écrits

Fonction Zéta, Fonction Gamma indications

Fonction Zéta

- Q1. Ensemble de définition d'une fonction définie par la somme d'une série. Question de cours sur les séries de Riemann (chap. Séries).
- Q2. Penser au théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions. La continuité est une notion locale.
- Q3. (a) Conjecturer le résultat puis le montrer par récurrence; utiliser la forme exponentielle des puissances.
(b) Question délicate: Se placer sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ et utiliser des comparaisons avec des séries de Riemann en choisissant bien l'exposant..
- Q4. Utiliser le signe de la dérivée donné par la question précédente, ou bien directement la définition de la monotonie.
- Q5. (a) Sans calcul, d'après le théorème de la limite monotone et Q4.
(b) Par calcul sur les inégalités appliqué aux sommes de séries.
(c) Par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, puisque quand $N \rightarrow +\infty$.
- Q6. Méthode de comparaison série-intégrale. Equivalent à l'aide d'un encadrement.
- Q7. Tracé de courbe à l'aide des variations et des limites.
- Q8. (a) Théorème sur les séries alternées.
(b) Théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions..
(c) Reconnaître une série lacunaire et l'exprimer en enlevant les termes nuls.
(d) Utiliser Q8. c, Q5. c et les théorèmes généraux de calculs sur les limites.

Fonction Gamma

- Q1. Intégrabilité (sans calculer l'intégrale) par théorème de comparaison.
Domination de t^{x-1} : distinguer suivant la valeur de t .
- Q2. Intégration par parties dans une intégrale généralisée.
- Q3. Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre; la domination est délicate.
- Q4. Utiliser le résultat donné à la question précédente.
Pour montrer une positivité stricte montrer ≥ 0 puis $\neq 0$.
- Q5. En 0, utiliser la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En $+\infty$, utiliser le théorème de la limite monotone.
- Q6. Utiliser le théorème de Rolle.
- Q7. Par étude de signe de la dérivée de Γ' puis de Γ .
Tracé de courbe à l'aide des variations et des limites.
- Q8. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$ et calculer $I_n(x)$.
- Q9. Ecrire que : $\frac{t^{x-1}}{e^t-1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \times \frac{1}{1-e^{-t}}$.

Sujet de révision pour les écrits

Fonction Zéta, Fonction Gamma Corrigé

Fonction Zéta

Q1. L'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1, +\infty[$ car la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$ (c'est du cours).

Q2. On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions :

- Chaque f_n est clairement continue sur $[a; +\infty[$.
- Soit $a \in]1, +\infty[$. On a alors : $\forall n \geq 1, \forall x > a, 0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement, donc uniformément sur $[a; +\infty[$.

Donc la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a; +\infty[$, pour tout $a > 1$.

On en déduit que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Q3. (a) Comme $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$, l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et par récurrence immédiate sur k on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1, +\infty[\left[, f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k e^{-x \ln n} = \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \right.$$

(b) On utilise le théorème de dérivation k fois d'une série de fonction, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- Chaque f_n est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$,
- Soit $a \in]1, +\infty[$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq 1, \forall x > a, \left| f_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a} \text{ (qui ne dépend pas de } x \text{)}.$$

Or, par croissances comparées, si $\alpha \in]1, a[$, on a : $n^\alpha \times \frac{(\ln(n))^k}{n^a} = \frac{(\ln(n))^k}{n^{a-\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, soit : $0 \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge,

par comparaison, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge aussi.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a; +\infty[$.

Ainsi la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a; +\infty[$ pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$; et l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall x > 1 \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

Q4. Pour tout x, y tels que $1 < x \leq y$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n} \geq e^{-y \ln n} = \frac{1}{n^y}$. Par croissance de la somation des séries convergentes, on en déduit que $\zeta(x) \geq \zeta(y)$. Ainsi, la fonction ζ est décroissante.

Autre idée : d'après Q3. b, on a : $\forall x > 1 \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x} < 0$.

Q5. (a) La fonction ζ possède une limite finie en $+\infty$ d'après le th. de la limite monotone, car elle est décroissante et minorée (car positive) sur $]1, +\infty[$.

(b) Comme $x \geq 2$, on a $n^x \geq n^2$, donc par sommation (infinie) d'inégalités larges, on a :

$$1 = \sum_{n=1}^1 \frac{1}{n^x} \leq \zeta(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = 1$ (car $\frac{1}{n^x} \rightarrow 1$ si $n = 1$ et $\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ si $n \geq 2$),

par passage à la limite dans l'inégalité large précédente quand x tend vers $+\infty$, on obtient :

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) \leq 1 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (reste d'une série convergente, en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, par double inégalité, on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

Remarque : comme on l'a vu en cours, cette limite s'obtient aussi directement en appliquant le théorème de la double limite.

Q6. Soit $h \in]0; +\infty[$. L'application $t \mapsto \frac{1}{t^{1+h}}$ étant décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^{1+h}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{1+h}} \leq \frac{1}{(n+1)^{1+h}} \text{ d'où : } \frac{1}{h} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{h+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{h+1}} \leq \zeta(1+h)$$

Et :

$$\zeta(1+h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{h+1}} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^{h+1}} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{h+1}} = 1 + \frac{1}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h}$$

D'où, par th. d'encadrement pour $\zeta(1+h)$, on a $\zeta(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h}$, soit : $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Q7. Allure de la représentation graphique de ζ .

Q8. (a) Soit $x > 0$. La suite réelle $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante de limite nulle.

Le théorème spécial des séries alternées (CSSA) affirme alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge. D'où l'existence de F .

(b) On utilise le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions :

- Chaque $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est clairement continue sur $]0; +\infty[$.

- Posons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Le CSSA donne aussi une majoration du reste :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0 \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

Ainsi, pour $a > 0$, on a : $\forall x \geq a, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$ (qui ne dépend pas de x)

donc R_n est bornée et $\|R_n\|_\infty^{[a; +\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^a} = 0$, cela prouve que la série de fonctions continues $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Donc F est continue sur tout intervalle $[a; +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (car a est arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+^*$).

(c) Soit $x > 1$. On a :

$$\zeta(x) + F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^k}{k^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = 2^{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x} \zeta(x)$$

où la deuxième égalité s'obtient car $1 + (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$ en éliminant les termes nuls de la série lacunaire.

(d) Ainsi $F(x) = \zeta(x) (-1 + 2^{1-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$,

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$ (cf. Q5) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{1-x} = 0$.

Fonction Gamma

Q1a. - La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

- En 0, on a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable en 0 ssi $1 - x < 1$, soit $x > 0$, d'où l'intégrabilité en 0, par théorème de comparaison.

- En $+\infty$, par croissances comparées, on a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$; or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$, d'où l'intégrabilité en $+\infty$, par théorème de comparaison.

Q1b Appliquons le th de continuité avec $A = [a, b]$ ($0 < a < b$).

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est CPM sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue $[a, b]$.
- Domination:

$$\forall x \in [a, b], |f(x, t)| \leq \varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \\ t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

Et $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

- $\varphi_{a,b}$ est CPM sur $]0, +\infty[$;
- $\varphi_{a,b}$ est intégrable en $+\infty$ car, $\varphi(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
- $\varphi_{a,b}$ est intégrable en 0 car $t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$

Q2. Par intégration par parties :

$$\Gamma(x+1) = \left[-xt^{1-x}e^{-t}\right]_{t \rightarrow 0}^{t \rightarrow +\infty} - \int_0^{+\infty} -xt^{1-x}e^{-t} = 0 + x\Gamma(x),$$

par croissances comparées.

Q3. On utilise le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre avec $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$:

Si $0 < a < b$ posons $A = [a, b]$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable d'après la question 1.
- Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ est CPM sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, on a :

$$\forall x \in [a, b], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t) = \begin{cases} |\ln t| t^{b-1}e^{-t} & \text{si } t > 1 \\ t^{a-1} |\ln t| & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

Et $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car

- $\varphi_{a,b}$ est $\mathcal{C}_{\text{mor}}$ sur $]0, +\infty[$;
- $\varphi_{a,b}$ est intégrable en $+\infty$ car, en utilisant que $\ln(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(t)$ on a $(\ln t)t^{b-1}e^{-t} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(t^b e^{-t}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $2 > 1$.

- $\varphi_{a,b}$ est intégrable en 0 car $t^{a-1} |\ln t| \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{|\ln t|}{t^{1-a}}$ avec $1 - a < 1$.

Si $1 - a < \beta < 1$, $\frac{|\ln t|}{t^{1-a}} = t^{\beta-(1-a)} |\ln t| \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ donc $\frac{|\ln t|}{t^{1-a}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)$ et $\beta < 1$ avec $t \mapsto \frac{1}{t^\beta}$ intégrable sur $]0, 1]$ car $\beta < 1$.

Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ pour tout a, b , donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on obtient la formule pour $\Gamma'(x)$ de l'énoncé.

Q4. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ est positive.

Donc par croissance de l'intégration, on a : $\forall x > 0, \Gamma''(x) \geq 0$.

Comme $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$ est positive et continue, si l'on avait $\Gamma''(x) = 0$, alors la fonction $t \mapsto (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}$

serait nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui n'est pas le cas.

Donc : $\forall x > 0, \Gamma''(x) > 0$.

Q5. Par calcul de primitive, on a $\Gamma(1) = 1$. D'après Q2, on en déduit que $\Gamma(2) = 1$.

De plus la fonction Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$.

Donc le théorème de Rolle assure alors l'existence d'un réel $\theta \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\theta) = 0$.

Q6.

x	0	θ	$+\infty$
$\Gamma''(x)$		+	+
$\Gamma'(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$
		-	+
Γ		$\searrow$	$\nearrow$

Q7. Comme Γ est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, elle est continue en 1, donc $\Gamma(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \Gamma(1) = 1$.

Ainsi, au voisinage de 0, on a $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, la fonction Γ est croissante donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite, finie ou $+\infty$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ a pour limite $+\infty$, donc on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$.

Q8. - On applique le théorème de convergence dominée sur l'intervalle $]0, +\infty[$ à la suite de fonction (g_n) définie par :

$$g_n(t) = \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

- Pour tout n , g_n est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ (continue en fait, même en $t = n$).
- Classiquement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ donc (g_n) converge simplement sur I vers la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
- On a : $n \ln \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$ (inégalité de convexité), donc $|g_n(t)| = g_n(t) \leq t^{x-1}e^{-t}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ (puisque positive et son intégrale est $\Gamma(x)$).
Donc le théorème donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.
- Pour tout $k \in [[0, n]]$ on pose $J_k = \int_0^n t^{x-1+k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} dt$.

Par intégration par partie, on a :

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^n t^{x-1+k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k} dt \\ &= \left[\frac{t^{x+k}}{x+k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k-1} \right]_{t=0}^{t=n} + \frac{n-k}{n(x+k)} \int_0^n t^{x+k} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-k-1} dt \\ &= \frac{n-k}{n(x+k)} J_{k+1} \end{aligned}$$

Donc par récurrence sur k , on a : $I_n(x) = J_0 = \frac{n!}{n^n \times x(x+1) \cdots (x+n-1)} J_n$.

Or, par calcul de primitive, on a $J_n = \int_0^n t^{x-1+n} dt = \frac{n^{x+n}}{x+n}$.

Donc : $I_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

D'où le résultat voulu : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \Gamma(x)$.

Q9. Pour tout $t > 0$, d'après le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$ valable si $u \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{t^{x-1}}{e^x - 1} = \frac{t^{x-1}}{e^t} \times \frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t}$$

On applique alors le théorème d'intégration terme à terme pour la série fonctions définies par $f_n(t) = t^{x-1} e^{-(n+1)t}$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ avec

- Chaque fonction f_n est intégrable sur I car, par changement de variable $u = (n+1)t$ - licite car affine - l'intégrale $\int_I |f_n| = \int_I f_n$ est de même nature (et égale en cas de convergence) à l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(n+1)^{x-1}} e^{-u} \frac{du}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^x} \Gamma(x)$$

Or on sait que l'intégrale $\Gamma(x)$ converge bien pour $x > 0$.

- La série de fonction $\sum_{k=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur I vers la fonction $S : t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^x - 1}$ Comme on l'a vu au début.
- La fonction S est continue par morceaux sur I (car continue).
- la série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)^x} \Gamma(x)$ converge car c'est une série de Riemann avec $x > 1$.
Donc le théorème donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^x - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \Gamma(x) = \Gamma(x) \zeta(x)$$

Q10 idem Q3 avec $\ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}$ à dominer.