

DM 18 pour le 16 mars 2026

Exercice 1 On pose, pour x réel, $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(tx) e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que $F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}xF(x)$.

3. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : 2y'(x) + xy(x) = 1$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose la série entière de rayon $R > 0$.

(a) A quelle condition sur les coefficients a_n la fonction g vérifie-t-elle l'équation $(\mathcal{E})$ sur $] -R, R[$.

(b) On suppose que g vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. Exprimer a_n en fonction de n .

(c) En déduire que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser ce développement.

Problème

Notations

On note :

$C(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

$C_b(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions bornées appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^1(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

$L^2(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ constitué des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $C(\mathbb{R})$.

Pour toute fonction f de $C_b(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

Pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$.

Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$.

On admet que ces expressions définissent des normes sur les espaces en question.

Soit $f, g \in C(\mathbb{R})$. Lorsque la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$$

La fonction $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g .

I Généralités

Q 1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.

a Montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

b Justifier que $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

Q 2 Soit $(f, g) \in (L^2(\mathbb{R}))^2$.

Montrer que $f * g$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \times \|g\|_2$.

Q 3 Dans cette question, l'espace $C_b(\mathbb{R})$ est supposé muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application $\phi : \begin{cases} C_b(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}) \\ g \mapsto f * g \end{cases}$.

Montrer que ϕ est linéaire et continue.

Q 4 Soient $f, g \in C(\mathbb{R})$ telles que $f * g(x)$ soit défini pour tout réel x . Montrer que $f * g = g * f$.

II Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_b(\mathbb{R})$.

Q 5 Montrer que $f * g$ est continue.

Q 6 Montrer que si g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $f * g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Q 7 Soit k un entier naturel non nul.

On suppose que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et que toutes ses fonctions dérivées, jusqu'à l'ordre k , sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $f * g$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et montrer que $(f * g)^{(p)} = f * g^{(p)}$.

Q 8 On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2 + e^{it}}$.

a Déterminer une famille $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}$.

b En déduire une famille $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle $\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n e^{inx}$.

III Un pas vers le théorème de Stone Weierstrass

Pour tout entier naturel n , on note h_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$h_n(t) = \frac{(1 - t^2)^n}{\lambda_n}$$

et nulle en dehors de $[-1, 1]$, le réel λ_n étant donné par la formule

$$\lambda_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$$

Q 9 Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt \leq 2(1 - \varepsilon^2)^n + 2\varepsilon$.

Q 10 En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt = 0$.

On considère $f : -\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport $K > 0$.

On suppose que $\forall t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], f(t) = 0$.

Q 11 $f * h_n$ est une fonction polynomiale sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Q 12 Montrer que la suite de fonction $(f * h_n)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On peut, en affinant ce qui a été fait dans cette partie, montrer le théorème de Stone Weierstrass: Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Correction.

Correction de l'exercice 1:

1. Posons $f(x, t) = \sin(tx) e^{-t^2}$.

Soit x réel fixé. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$|f(x, t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$. et φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$.
donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. De même

Soit x réel fixé. La fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

La fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t \cos(tx) e^{-t^2}$

Soit x réel fixé. La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

Soit $t \in [0, +\infty[$ fixé. La fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2} = \varphi(t)$. et φ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et intégrable car $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$.

donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. et $F'(x) = \int_0^{+\infty} -t \cos(tx) e^{-t^2} dt$. On effectue une intégration par parties (sous réserve de limites finies) $F'(x) = \int_0^{+\infty} -t \cos(tx) e^{-t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \cos(tx) e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x \sin(tx) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x F(x)$.

3. Soit l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : 2y'(x) + xy(x) = 1$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose la série entière de rayon $R > 0$.

(a) On peut dériver une série entière sur $] -R, R[$: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ donc la fonction g vérifie $(\mathcal{E})$ si et

seulement si $2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$ soit $2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$ soit $2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = 1$ soit $2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2(n+1) a_{n+1} + a_{n-1}) x^n = 1$ soit, par unicité du développement en série entière, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2(n+1) a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $2(n+2) a_{n+2} + a_n = 0$ soit $a_{n+2} = -\frac{a_n}{2(n+2)}$.

(b) On en déduit que $a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2(2n)} = (-1)^2 \frac{a_{2n-4}}{2(2n)2(n-2)} = \dots$

$$= (-1)^n \frac{a_0}{2(2n) \times 2 \times 2(n-1) \times \dots \times 2 \times 2 \times 1} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n} n!}.$$

De même $a_{2n+1} = -\frac{a_{2n-1}}{2(2n+1)} = (-1)^2 \frac{a_{2n-3}}{2(2n+1)2(2n-1)} = \dots = (-1)^n \frac{a_1}{2(2n+1)2(2n-1) \times \dots \times 2}$

$$\text{donc } a_{2n+1} = (-1)^n \frac{a_1 (2n) \times 2(n-1) \times \dots \times 2}{2^n (2n+1)!} = (-1)^n \frac{a_1 n!}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{n!}{2(2n+1)!}.$$

(c) La fonction F est solution de $(\mathcal{E})$ et vérifie $F(0) = 0$. Une solution de $(\mathcal{E})$ développable en série entière vérifie donc $a_0 = 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{n!}{2(2n+1)!}$. Déterminons le rayon de

convergence de la série entière $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$. On a $\left| \frac{a_{2n+3} x^{2n+3}}{a_{2n+1} x^{2n+1}} \right| = \frac{|x^2|}{2n+3} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$ donc la série

$\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ converge pour tout x . La fonction $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = 0$ donc d'après le théorème de Cauchy, $g = F$ donc F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Correction du problème

R 1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in C_b(\mathbb{R})$.

- a** On a $\forall x, t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq |f(t)|\|g\|_\infty$, or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par comparaison $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui assure la définition de $f * g$ dans $\mathbb{R}$.
- b** De plus, $|(f * g)(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\|g\|_\infty dt = \|g\|_\infty \|f\|_1$ donc $\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

R 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $g_x(t) = g(x-t)$. La fonction g_x est continue car g l'est et le changement de variable affine $u : t \mapsto x-t$ donne (sous réserve de convergence) $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x-t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} -g^2(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u)du$ qui converge par hypothèse donc $g_x \in L^2(\mathbb{R})$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $(f|g) = \int_{\mathbb{R}} fg$ donne $|(f * g)(x)| = |(f|g_x)| \leq \|f\|_2 \times \|g_x\|_2 = \|f\|_2 \times \|g\|_2$.

R 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$

Prenons g_1, g_2 dans $C_b(\mathbb{R})$. et λ_1, λ_2 des complexes.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\phi(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) = f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x-t)dt = \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_1(x-t)dt + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_2(x-t)dt$ par linéarité de l'intégrale.

On a donc $\phi(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) = \lambda_1 f * g_1(x) + \lambda_2 f * g_2(x) = \lambda_1 \phi(g_1)(x) + \lambda_2 \phi(g_2)(x)$, égalité vraie pour tout x donc

$\phi(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \phi(g_1) + \lambda_2 \phi(g_2)$ donc ϕ est linéaire.

De plus, d'après la première question $\|\phi(g)\|_\infty \leq \|f\|_1 \times \|g\|_\infty$ et ϕ est linéaire donc $\|\phi(g_1) - \phi(g_2)\|_\infty = \|\phi(g_1 - g_2)\|_\infty \leq \|f\|_1 \times \|g_1 - g_2\|_\infty$ donc ϕ est lipschitzienne de rapport $\|f\|_1$ donc continue.

R 4 Soit $x \in \mathbb{R}$. le changement de variable affine $u : t \mapsto x-t$ donne $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{+\infty}^{-\infty} -f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)g(u)du$ donc $g * f(x)$ existe pour tout x et $f * g = g * f$.

R 5 Appliquons le théorème de continuité:

- $(x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$, φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées, ce qui assure la continuité de $f * g$.

R 6 Par linéarité de l'intégrale et inégalité triangulaire,

on a $|f * g(y) - f * g(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(g(x-t) - g(y-t))dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \times |g(x-t) - g(y-t)| dt$.

Si g est K -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, $|g(x-t) - g(y-t)| \leq K \times |x-y|$ donc $|f * g(y) - f * g(x)| \leq K \times |x-y| \times \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

alors $f * g$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ de rapport $K \times \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$.

R 7 Appliquons la version " C^k " du théorème de dérivation sous $\int$. Posons $u(x, t) = f(t)g(x-t)$

- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto u(x, t)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(x, t) = f(t)g^{(p)}(x-t)$ (qui est CPM sur $\mathbb{R}$)
- Domination: $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \forall p \in [[0, k]], |\frac{\partial^p u}{\partial x^p}(f(t)g(x-t))| = |f(t)g^{(p)}(x-t)| \leq \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)| = \varphi_p(t)$, et φ_p est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $f * g$ est de classe C^k et on a

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [[0, k]], (f * g)^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^{(p)}(x-t)dt = (f * g^{(p)})(x)$.

R 8 On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2 + e^{it}}$.

a On a $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \frac{1}{2+e^{it}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{e^{it}}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{it}}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} e^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{int}$ avec $c_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

b Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). On a $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in(x-t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(t) c_n e^{in(x-t)} dt$.

Posons $u_n(t) = f(t)c_n e^{in(x-t)}$ et appliquons le théorème d'interversion série intégrale sur un intervalle quelconque:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est CPM car f l'est et $|u_n(t)| = |f(t)c_n| \leq |f(t)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc u_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (découle du a) et a pour somme $t \mapsto f(t)g(x-t)$ qui est CPM sur $\mathbb{R}$.

- On a $\int_{\mathbb{R}} |u_n| = |c_n| \int_{\mathbb{R}} |f|$ et la série $\sum c_n$ converge (géométrique de raison $\frac{1}{2}$) donc la série $\sum \int_{\mathbb{R}} |u_n|$ converge.

On en déduit $(f * g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)c_n e^{in(x-t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)c_n e^{-in(t)} dt \right) \times e^{inx}$.

Le résultat en découle avec $c'_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)c_n e^{-in(t)} dt$

R 9 On a $\int_{\varepsilon}^1 |t| h_n(t) dt \leq \int_{\varepsilon}^1 h_n(t) dt$ et si $t \geq \varepsilon$ alors $(1-t^2)^n \leq (1-\varepsilon^2)^n$ donc $\int_{\varepsilon}^1 |t| h_n(t) dt \leq (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)^n \leq (1-\varepsilon^2)^n$.

Par parité, $\int_{-1}^{-\varepsilon} |t| h_n(t) dt \leq (1-\varepsilon^2)^n$

De plus, $\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} |t| h_n(t) dt \leq 2\varepsilon$ car $|t| h_n(t) \leq 1$.

On en déduit que $\int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt \leq 2(1-\varepsilon^2)^n + 2\varepsilon$.

R 10 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(1-\varepsilon^2)^n$ donc il existe un rang n_0 à partir duquel $2(1-\varepsilon^2)^n < \varepsilon$.

Pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq \int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt < 3\varepsilon$.

Or $\varepsilon > 0$ étant quelconque, 3ε est aussi un réel strictement positif quelconque donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{+1} |t| h_n(t) dt = 0$

R 11 • On a $(f * h_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_n(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)h_n(x-t)dt$.

Si $x > \frac{3}{2}$ et $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alors $x-t > 1$ donc $h_n(x-t) = 0$. De même si $x < -\frac{3}{2}$.

• $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_n(x-t)dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)h_n(x-t)dt$. Or $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ entraîne que $x-t \in [-1, 1]$ donc

$\frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) (1-(x-t)^2)^n dt$,

En appliquant la formule du binôme deux fois (où en procédant par récurrence sur n) il existe des fonctions polynômiales $a_0, \dots, a_{2n}$ vérifiant

$\forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(1-(x-t)^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k$, donc $(f * h_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)a_k(t) dt \right) x^k$, donc $f * h_n$ est polynômiale

sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

R 12 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $(f * h_n)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)dt - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)h_n(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h_n(t)dt$ car $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)dt = 1$.

On en déduit que $|(f * h_n)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x)) \times h_n(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)| \times |h_n(t)| dt \leq K \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \times h_n(t)dt$ (car $h_n \geq 0$).

L'inégalité étant vraie pour tout réel x , la fonction $f * h_n - f$ est bornée et $\|f * h_n - f\|_{\infty} \leq K \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \times h_n(t)dt$.

On a donc bien d'après la question 10, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f * h_n - f\| = 0$ ce qui permet de conclure.