

Sujet de révision pour les écrits

Quelques inégalités sur le déterminant et la trace

Si n est un entier positif, on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, noté $(X | Y) = X^\top Y$ pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $\|X\| = \sqrt{(X | X)}$ la norme associée.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $R(A) = \{X^\top A X \mid X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$.

Généralités, quotient de Rayleigh

Q1. Démontrer que les valeurs propres réelles de A appartiennent à $R(A)$.

Q2. (a) Démontrer que les éléments $a_{i,i}$ ($1 \leq i \leq n$) de la diagonale de A appartiennent à $R(A)$.

(b) En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que les éléments $a_{i,j}$ avec $i \neq j$ n'appartiennent pas nécessairement à $R(A)$.

Q3. Soit Q une matrice orthogonale. Montrer que $R(A) = R(Q^\top A Q)$ et $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(Q^\top A Q)$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que A est symétrique

Q4. Soient X_1 et X_2 appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Y_t = \cos(t) X_1 + \sin(t) X_2$.

a Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto Y_t^\top A Y_t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b En déduire que $[\min(sp(A)), \max(sp(A))] \subset R(A)$.

Q5 Montrer que $[\min(sp(A)), \max(sp(A))] = R(A)$.

Q6. Démontrer que si $\text{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$.

Une inégalité sur la trace pour les matrices symétriques d'ordre 2

Soient deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2$ (resp. $\mu_1 \leq \mu_2$) les valeurs propres de A (resp. B).

Q7. Démontrer que $\text{Tr}(AB) \leq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$.

Indication : on pensera à utiliser le théorème spectral.

Une inégalité sur le déterminant pour les matrices de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})^+$

Q8. Soit $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ symétrique. Montrer que :

$$S \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R}) \iff (\text{Tr}(S) \geq 0 \text{ et } \det(S) \geq 0).$$

Soient deux matrices symétriques positives d'ordre deux $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

Q9. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\frac{b_1}{\sqrt{\det(A)}}, \frac{b_2}{\sqrt{\det(B)}}) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

démontrer que : $b_1 b_2 \leq \sqrt{a_1 a_2 d_1 d_2} - \sqrt{\det(A) \det(B)}$.

Q10. En calculant $\det(A+B) - \det(A) - \det(B)$, en déduire que :

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B) + 2\sqrt{\det(A) \det(B)}$$

Q11. Dans le cas où $\det(A) \det(B) \neq 0$ et $b_1 b_2 \neq 0$, montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$.

Plusieurs inégalités sur le déterminant pour les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{++}$

Dans cette partie toutes les matrices sont d'ordre n où n est un entier supérieur ou égal à 2 .

Q12. Soit A une matrice symétrique définie positive.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible Y telle que $A = Y^\top Y$.

Q13. Soient A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique.

Démontrer qu'il existe une matrice inversible T telle que :

$$T^\top AT = I_n \text{ et } T^\top BT = D,$$

où D est une matrice diagonale (et I_n est la matrice identité).

Q14. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives.

(a) Démontrer que : $\det(I_n + B) \geq 1 + \det(B)$.

(b) En déduire que : $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

Q15. Soit x un nombre réel strictement positif. Soit β un nombre réel tel que $0 < \beta < 1$.

Démontrer que : $x^\beta \leq \beta x + 1 - \beta$.

Q16. Soient A et B deux matrices symétriques définies positives, α et β deux nombres réels strictement positif tels que $\alpha + \beta = 1$; démontrer que

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta$$

Q17. Soit un entier $k \geq 1$. Soient $A_1, \dots, A_k$ des matrices symétriques définies positives et $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Démontrer que :

$$\det(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k) \geq (\det(A_1))^{\alpha_1} \dots (\det(A_k))^{\alpha_k}.$$

Indications

(Quelques inégalités sur le déterminant et la trace)

Q1. Considérer une valeur propre λ de A et introduire un vecteur propre associé X .

Q2. (a) Utiliser les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la définition de $R(A)$.

(b) Calculer $R(A)$.

Q3. Pour $R(A)$: se rappeler que Q est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé est une isométrie.

Pour $\text{Tr}(A)$: utiliser la définition d'une matrice orthogonale.

Q4. a) Utiliser toutes les continuités du cours

b) Choisir X_1 et X_2 en fonction du résultat demandé.

Utiliser l'orthogonalité des vecteurs propres pour déterminer la norme de Yt .

Utiliser le résultat de la question précédente pour le théorème des valeurs intermédiaires.

Q5. inclusion réciproque très classique (fait en cours). Utiliser le résultat précédent et le th spectral.

Q6. Utiliser le résultat précédent et le th spectral.

Q7. Question de synthèse difficile.

Q8. Utiliser la caractérisation des matrices positives à l'aide des valeurs propres.

Expliciter la trace et le déterminant à l'aide des valeurs propres (à bien justifier).

Q9. Faire ce qui est proposé + calcul.

Q10. Faire ce qui est proposé + calcul.

Q11. Il suffit qu'il y ait égalité à toutes les étapes du raisonnement précédent.

Utiliser le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Q12. Question classique. Utiliser une diagonalisation de A en b.o.n.

Q13. Utiliser le théorème spectral pour $(Y^T)^{-1}BY$ (après avoir vérifié que l'on peut).

Q14. (a) Se ramener au cas où B est diagonale.

(b) Se ramener au cas précédent en utilisant Q13. (vérifier que l'on peut bien).

Q15. Par étude de fonction, ou concavité.

Question facile bien que placée en fin de sujet; l'aviez-vous bien lue et traitée?

Q16. Se ramener au cas où A et B sont diagonales en utilisant Q13. .

Q17. On pourra raisonner par récurrence sur k .

Correction du sujet de révision pour les écrits: Quelques inégalités sur le déterminant et la trace

(Centrale PSI 2012, épreuve 2 - raccourci)

Q1. Soit λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé.

Alors $Y = \frac{1}{\|X\|}X$ est de norme 1 et est encore vecteur propre associé à λ et :

$$\lambda = \lambda(Y | Y) = (Y | AY) = Y^\top AY \in R(A)$$

Q2. (a) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est orthonormée. Alors :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, e_j^\top A e_i = (e_j | A e_i) = \left(e_j \mid \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k \right) = a_{j,i}$$

En particulier pour $i = j$, comme e_i est normé, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} = e_i^\top A e_i \in R(A).$$

(b) Avec la matrice A donnée, le calcul donne : $\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), X^\top AX = 0$. Donc $R(A) = \{0\}$.

Les coefficients non diagonaux 1 et -1 de A n'appartiennent pas à $R(A)$.

Q3. Comme Q est orthogonale, l'endomorphisme canoniquement associé est une isométrie (puisque la base canonique est orthonormale).

On a donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|X\| = 1$, on a $Y = QX$ qui est de norme 1.

Donc $Y^\top AY \in R(A)$, c'est à dire $X^\top Q^\top A Q X \in R(A)$. Ceci montre que $R(Q^\top A Q) \subset R(A)$.

En remplaçant Q par Q^{-1} (qui est aussi orthogonale) et A par $A^\top A Q$, on obtient l'inclusion contraire :

$$R(A) = R\left((Q^{-1})^\top (A^\top A Q) Q^{-1}\right) \subset R(A^\top A Q).$$

Ainsi $\forall Q \in O_n(\mathbb{R}), R(A) = R(Q^\top A Q)$.

Comme Q est orthogonale, $Q^\top = Q^{-1}$.

Comme deux matrices semblables ont même trace, on a ainsi $\text{Tr}(Q^\top A Q) = \text{Tr}(A)$.

Q4a. L'application $t \mapsto Y_t$ est continue (th opération)

L'application $X \mapsto X^T$ est continue car linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

Le produit matriciel est continu

$\varphi : t \mapsto (Y_t)^T A X_t$ est continue

Q4b Soit $\lambda_1 = \min(sp(A))$ et $\lambda_2 = \max(sp(A))$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ le résultat découle de la première question.

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et X_1 et X_2 vecteurs propres unitaires associés.

On a $\varphi(0) = \lambda_1$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lambda_2$.

La fonction φ est continue, donc, d'après le théorème de valeurs intermédiaires,

Pour tout $c \in [\lambda_1, \lambda_2]$, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t) = c$.

Or A étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont orthogonaux

donc $X_1 \perp X_2$ donc $\|Y_t\|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $\varphi(t) \in R(A)$ donc $[\lambda_1, \lambda_2] \subset R(A)$.

Si l'on pose $Y_\lambda = \frac{1}{\|X_\lambda\|} X_\lambda$, qui est de norme 1, on a alors : $c = Y_\lambda^\top A Y_\lambda$ donc $c \in R(A)$.

On a ainsi montré que tout $c \in [a, b]$ appartient à $c \in R(A)$ i.e. $[\lambda_1, \lambda_2] \subset R(A)$.

Q5 Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une BON de vecteurs propres de A

Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ de norme 1.

$$\text{On a } X^T A X = (X | A X) = \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \mid A \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right) \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i X_i \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i \lambda_j x_j (X_i | X_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

car $(X_1, \dots, X_n)$ une BON.

Or $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \max(sp(A)) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \max(sp(A)) \|X\|^2 = \max(sp(A))$ car $(X_1, \dots, X_n)$ une BON

donc $X^T A X \leq \max(sp(A))$.

De même $X^T A X \geq \min(sp(A))$.

Q6. Si $\text{Tr}(A) = 0$ alors, la somme des valeurs propres de A est nulle donc $\min(sp(A)) \leq 0$ et $\max(sp(A)) \geq 0$ donc $0 \in R(A)$.

Q7. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P telle que :

$$P^T B P = \text{diag}(\mu_1, \mu_2) = D$$

Alors comme $P P^T = I_2$ et par commutation, dans la trace, on a:

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(AB P P^T) = \text{Tr}(P^T A B P) = \text{Tr}(P^T A P P^T B P) = \text{Tr}(A' D),$$

en posant $A' = P^T A P$, et d'après la question **Q3.** .

Un calcul simple donne $\text{Tr}(A' D) = \mu_1 a'_{1,1} + \mu_2 a'_{2,2}$.

Par ailleurs, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$ (cf. Q3.) indique que $\delta = a'_{1,1} - \lambda_1 = \lambda_2 - a'_{2,2}$.

Or D'après Q2. a, $a'_{1,1} \in R(A')$. Or (cf. Q3.) $R(A') = R(A)$. Enfin (cf. Q6.) $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$. donc $\delta \geq 0$

Finalement,

$$\text{Tr}(AB) = (\lambda_1 + \delta) \mu_1 + (\lambda_2 - \delta) \mu_2 \leq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 \text{ car } \delta \geq 0 \text{ et } \mu_1 \leq \mu_2.$$

Q8. Comme S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, donc χ_S est scindé dans $\mathbb{R}$, donc en notant $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres, on a:

$$\text{Tr}(S) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \det(S) = \lambda_1 \times \lambda_2$$

Ainsi :

$$(\text{Tr}(S) \geq 0 \text{ et } \det(S) \geq 0) \iff \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \iff S \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R}).$$

Q9. Remarque : avec la question précédente, on sait que A et B sont de trace et de déterminant positifs.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs proposés donne

$$b_1 b_2 + \sqrt{\det(A) \det(B)} \leq \sqrt{b_1^2 + \det(A)} \sqrt{b_2^2 + \det(B)} = \sqrt{a_1 d_1} \sqrt{a_2 d_2} = \sqrt{a_1 a_2 d_1 d_2}$$

Q10. Le calcul donne

$$\begin{aligned} \det(A+B) - \det(A) - \det(B) &= (a_1 + a_2)(d_1 + d_2) - (b_1 + b_2)^2 - (a_1 d_1 - b_1^2) - (a_2 d_2 - b_2^2) \\ &= a_1 d_2 + a_2 d_1 - 2b_1 b_2 \\ &\geq a_1 d_2 + a_2 d_1 - 2 \left(\sqrt{a_1 a_2 d_1 d_2} - \sqrt{\det(A) \det(B)} \right) \quad (\text{cf. Q9.}) \\ &= \left(\sqrt{a_1 d_2} - \sqrt{a_2 d_1} \right)^2 + 2\sqrt{\det(A) \det(B)} \\ &\geq 2\sqrt{\det(A) \det(B)} \end{aligned}$$

Q11. Pour qu'il ait égalité dans Q10. il faut (et il suffit) que l'on ait égalité à toutes les étapes du raisonnement, c'est-à-dire :

- $\sqrt{a_1 d_2} - \sqrt{a_2 d_1} = 0$, soit $a_1 d_2 = a_2 d_1$,

i.e. des vecteurs (a_1, d_1) et (a_2, d_2) sont liés (leur déterminant est nul).

- l'égalité dans l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est à dire que les vecteurs $(b_1, \sqrt{\det(A)})$ et $(b_2, \sqrt{\det(B)})$ sont proportionnels avec un coefficient de proportionalité positif.

De plus, comme $\sqrt{\det(A)}$ et $\sqrt{\det(B)}$ sont strictement positifs, ces deux vecteurs sont proportionnels (i.e. liés) si et seulement s'ils le sont avec un coefficient de proportionalité positif.

Sens réciproque:

S'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda B$ alors $(a_1, d_1) = \lambda(a_2, d_2)$ et $(b_1, \sqrt{\det(A)}) = \lambda(b_2, \sqrt{\det(B)})$ (car $\det A = \lambda^2 \det B$). On a ainsi égalité dans Q10. .

Sens direct:

Si on a égalité dans Q10. il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(b_1, \sqrt{\det(A)}) = \lambda(b_2, \sqrt{\det(B)}) \quad \text{et} \quad (a_1, d_1) = \mu(a_2, d_2).$$

De la première égalité on déduit que : $0 < \sqrt{\det(A)} = \lambda\sqrt{\det(B)}$, donc d'une part $\lambda > 0$, et d'autre part en élevant au carré $a_1 d_1 - b_1^2 = \lambda(a_2 d_2 - b_2^2)$. De plus, comme $b_1 = \lambda b_2$, on en déduit : $a_1 d_1 = \lambda^2 a_2 d_2$. De la seconde relation on déduit directement $a_1 d_1 = \mu^2 a_2 d_2$. (*)

Or on remarque que $a_2, d_2 > 0$.

En effet, en notant $\lambda_1(B), \lambda_2(B)$ les valeurs propres de B , on a $a_2, d_2 \in R(B) = [\lambda_1(B), \lambda_2(B)]$ d'après I.B. 1 et II.A et par ailleurs $\lambda_1(B), \lambda_2(B) > 0$ (positives car $B \geq 0$, et non nulles car $0 \neq \det(B) = \lambda_1(B)\lambda_2(B)$).

On prouve de même que $a_1, d_1 > 0$; comme $a_1 = \mu d_1$, on a donc $\mu > 0$.

Donc en simplifiant (*), on a $\mu^2 = \lambda^2$. Comme $\lambda, \mu > 0$, on a donc $\mu = \lambda$ et finalement $A = \lambda B$.

Q12. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $D_1 = P^{-1}AP$ soit diagonale. Et comme A est à valeurs propres strictement positives, les coefficients diagonaux d_i de D_1 sont strictement positifs (ce sont les valeurs propres de A). On peut donc définir :

$$\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$$

qui vérifie immédiatement $\Delta^2 = D_1$.

On a alors $A = PDP^{-1} = P\Delta^2 P^\top = Y^\top Y$ avec $Y = \Delta P^\top$.

De plus la matrice Y est inversible comme produit de matrices inversible

(P car elle est orthogonale, Δ car diagonale à coefficients diagonaux non nuls).

Q13. Posons $Z = Y^{-1}$ avec Y comme ci-dessus. Le calcul donne alors :

$$Z^\top AZ = Y^{-1^\top} Y^\top Y Y^{-1} = I_n$$

De plus, $Z^\top BZ$ est symétrique donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que : $Q^\top (Z^\top BZ) Q = D$.

Posons $T = ZQ$; c'est une matrice inversible et elle vérifie :

$$T^\top BT = (ZQ)^\top B(ZQ) = D \quad \text{et} \quad T^\top AT = Q^\top (Z^\top AZ) Q = Q^\top I_n Q = I_n.$$

Q14. (a) La matrice B est symétrique définie positive. D'après le théorème spectral, il existe donc une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}BQ = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\forall i, \mu_i > 0$.

On a alors $Q^{-1}(I_n + B)Q = \text{diag}(1 + \mu_1, \dots, 1 + \mu_n)$.

Deux matrices semblables ont le même déterminant, donc : $\det(I_n + B) = \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i)$.

Quand on développe ce produit, on obtient 2^n termes positifs dont 1 et $\prod_{i=1}^n \mu_i$.

On a donc : $\det(I_n + N) \geq 1 + \prod_{i=1}^n \mu_i = 1 + \det(B)$.

Remarque : B positive suffirait pour pouvoir conclure.

(b) On utilise la matrice inversible T obtenue en Q13. :

$$\det(A + B) = \frac{1}{\det(T)^2} \det(T^\top AT + T^\top BT) = \frac{1}{\det(T)^2} \det(I_n + T^\top BT)$$

On applique alors la question précédente avec $B' = T^\top BT$ est symétrique (immédiat) et définie positive. En effet,

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^\top B' X = (TX)^\top B(TX) > 0 \text{ car } B \text{ est inversible donc } BX \neq 0$$

On en déduit que :

$$\det(A + B) \geq \frac{1}{\det(T)^2} (1 + \det(T^\top BT)) = \frac{1}{\det(T)^2} + \det(B)$$

Enfin, par choix de T , on a $\det(T)^2 \det(A) = 1$ et donc :

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$$

Q15. Soit la fonction $g : x \mapsto x^\beta - \beta x$.

Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x > 0, g'(x) = \beta(x^{\beta-1} - 1)$; donc g est croissante sur $]0, 1[$ puis décroissante ensuite (car $\beta - 1 < 0$).

Ainsi elle atteint son maximum en 1 où elle vaut $1 - \beta$. On a ainsi :

$$\forall x > 0, x^\beta - \beta x \leq 1 - \beta$$

Autre idée : la fonction $x \mapsto x^\beta$ est concave car $\beta \in]0, 1[$, donc son graphe est en dessous de la tangente au point d'abscisse, qui a pour équation $y = \beta(x - 1) + 1$.

Q16. On procède comme à la question Q14. b où l'on avait déjà vu que $T^\top BT$ est symétrique et définie positive. Si l'on note encore $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \det(\alpha A + \beta B) &= \frac{1}{\det(T)^2} \det(\alpha T^\top AT + \beta T^\top BT) \\ &= \frac{1}{\det(T)^2} \det(\alpha I_n + \beta T^\top BT) \\ &= \frac{1}{\det(T)^2} \prod_{k=1}^n (\beta(\mu_k - 1) + 1) \quad \text{car } \alpha = 1 - \beta \\ &\geq \frac{1}{\det(T)^2} \prod_{k=1}^n \mu_k^\beta \quad \text{car } \beta(\mu_k - 1) + 1 \geq \mu_k^\beta \geq 0 \text{ (cf 15.)} \\ &= \frac{1}{\det(T)^2} (T^\top BT)^\beta \\ &= (\det(T)^2)^{\beta-1} (\det(B))^\beta \\ &= (\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta \quad \text{car } \det(A) = \det(T)^2 \end{aligned}$$

Q17. On prouve le résultat par récurrence sur k .

- Initialisation : le résultat est immédiat au rang 1 et on vient de le prouver au rang 2.
- Hérédité : soit $k \geq 3$ tel que le résultat soit vrai aux rangs $1, \dots, k-1$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ des réels > 0 de somme égale à 1. Soient $A_1, \dots, A_k$ des matrices symétriques définies positives. $\alpha_k \neq 1$ car sinon $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} = 0$. On écrit alors que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = (1 - \alpha_k) B + \alpha_k A_k \text{ avec } B = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} A_i$$

B est symétrique comme somme de matrices symétriques et définie positive (pour tout X non nul, on vérifie que $X^\top BX > 0$ et donc que $R(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$). On peut appliquer le résultat au rang 2 pour obtenir

$$\det\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i\right) \geq (\det(B))^{1-\alpha_k} \det(A_k)^{\alpha_k}$$

Par ailleurs, les coefficients $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}$ sont > 0 de somme égale à 1 . L'hypothèse de récurrence au rang $k - 1$ donne

$$\det(B) \geq \prod_{i=1}^{k-1} (\det(A_i))^{\frac{\alpha_i}{1-\alpha_k}}$$

La combinaison des deux inégalités donne le résultat voulu, c'est à dire le résultat au rang k .