

Exercice 1 Soit $f \left\{ \begin{array}{l}]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{array} \right.$

1. Etudier l'existence d'extremum local de f .
2. Déterminer un rectangle en dehors duquel $f(x, y) \geq f(1, 1)$.
3. Montrer que f admet un minimum global.

Solution:

1. Fait en cours

2. On a $f(1, 1) = 3$.

Posons $R = [a, b] \times [a, b]$.

$(x, y) \in R \Leftrightarrow (x \geq a \text{ et } y \geq a \text{ et } x \leq b \text{ et } y \leq b)$

donc $(x, y) \notin R \Leftrightarrow (x < a \text{ ou } y < a \text{ ou } x > b \text{ ou } y > b) : (C)$

Prenons $a = \frac{1}{4}$ et $b = 16$.

Soit $(x, y) \notin R$

• Si $(x < \frac{1}{4} \text{ ou } y < \frac{1}{4})$ alors $\frac{1}{x} > 4$ ou $\frac{1}{y} > 4$ donc $f(x, y) \geq 4 > f(1, 1)$

• Sinon $(x \geq \frac{1}{4} \text{ et } y \geq \frac{1}{4})$ et d'après (C) on a $(x > 16 \text{ ou } y > 16)$.

Si $x > 16$ alors $xy \geq 4$ donc $f(x, y) > 4 > f(1, 1)$

idem si $y > 16$.

On a donc $\forall (x, y) \notin R, f(x, y) > 4 > f(1, 1)$

3. L'ensemble R est fermé et borné donc f admet un minimum dans R atteint en (x_0, y_0) .

• On a nécessairement $(x_0, y_0) \in \left] \frac{1}{4}, 4 \right[\times \left] \frac{1}{4}, 4 \right[= O$ car sinon $(x_0 = \frac{1}{4} \text{ ou } y_0 = \frac{1}{4} \text{ ou } x_0 = 16 \text{ ou } y_0 = 16)$ et le même

raisonnement que dans Q2 donne $f(x_0, y_0) \geq 4 > f(1, 1)$

donc $f(x_0, y_0)$ n'est pas minimum de f sur R .

• Comme $(x_0, y_0) \in \left] \frac{1}{4}, 4 \right[\times \left] \frac{1}{4}, 4 \right[$ qui est ouvert, (x_0, y_0) est un point critique de f donc $(x_0, y_0) = (1, 1)$ donc $f(1, 1)$ est

un minimum de f sur R donc sur $]0, +\infty[^2$ d'après Q2