

Fonctions de plusieurs variables

Exercices 125, 126, 129

Complément sur les séries de fonctions:

Exercice 1 *Le but de l'exercice est d'étudier la fonction $f : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}$*

et de montrer que pour tout $x > 0$, $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = f(x)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3. Pour $t \in]0, 1]$, on pose $g(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

a Justifier l'existence de $\int_0^1 g(t) dt$.

b En utilisant la série géométrique, écrire $g(t)$ sous forme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$ pour $t \in]0, 1[$

c Faire une interversion série intégrale sans la justifier.

4. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème d'interversion sur un intervalle quelconque.

5. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème d'interversion sur un segment.

6. On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N(t) = \sum_{n=0}^N u_n(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite (S_N) , prouver le résultat demandé.

7. Autre méthode: on pose $H(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$

a Donner une relation entre $H(x)$ et $H(x+1)$.

b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une relation entre $H(x)$ et $H(x+n)$.

c Retrouver le résultat demandé

Suites de fonctions

Exercice 2 On définit une suite (u_n) de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, 1], u_0(x) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$.

1. Déterminer les fonctions u_1 et u_2 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et continue sur $[0, 1]$.

3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Convergence simple de la suite de fonctions (u_n) .

(a) Justifier que pour tout $x \in [0, 1]$ la série $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$ converge.

(b) En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction qu'on notera u dans la suite.

5. Convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) .

(a) Montrer que $u(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$.

(b) En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction u non nulle.

6. Propriétés de la fonction u .

(a) Montrer que la fonction u est continue sur $[0, 1]$.

(b) Montrer que $\forall x \in [0, 1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$.

(c) en déduire que u est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], u'(x) = u(x - x^2)$.

Complément sur les séries de fonctions:

1. On pose, pour $x > 0$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. On a $|u_n(x)| = \frac{1}{x+n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ donc $\sum |u_n(x)|$ diverge. Utilisons CSSA: Soit $x > 0$ fixé. On a:

- $(-1)^n u_n(x) = \frac{1}{x+n} > 0$ (série alternée)

- $|u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{x+n} = |u_n(x)|$ donc la suite $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

On en déduit que

- $\sum u_n(x)$ converge

- la somme $f(x)$ est du signe de $u_0(x)$ et $|f(x)| \leq |u_0(x)|$

- le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ est du signe de $u_{n+1}(x)$ et $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ et donc

$$\|R_n\|_{\infty} = \sup_{x \in]0, +\infty[} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$ donc $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

chaque fonction u_n est continue sur $]0, +\infty[$ donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

2. On applique la généralisation du théorème de dérivation terme à terme

- chaque u_n est C^{∞} .

- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (Q1)

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$:

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} = (-1)^n (x+n)^{-1} \text{ donc } u'_n(x) = (-1)^n \times (-1) (x+n)^{-2}, u''_n(x) = (-1)^n \times (-1) (-2) (x+n)^{-3}$$

$$\text{Par récurrence, } u_n^{(k)}(x) = (-1)^n \times (-1) (-2) \cdots (-k) (x+n)^{-(1+k)} = \frac{(-1)^{n+k} \times k!}{(x+n)^{1+k}}.$$

$$\text{On a } |u_n^{(k)}(x)| = \left| \frac{k!}{(x+n)^{1+k}} \right| \leq \frac{k!}{n^{1+k}} \text{ donc } \|u_n^{(k)}\|_{\infty} \leq \frac{k!}{n^{1+k}}. \text{ Comme } k+1 \geq 2, \sum_n \frac{1}{n^{1+k}} \text{ converge donc}$$

$\sum \|u_n^{(k)}\|_{\infty}$ converge et $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $]0, +\infty[$.

$$\text{On en déduit que } f \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} \times k!}{(x+n)^{1+k}}.$$

3. Pour $x > 0$, posons, pour $t \in]0, 1]$, $g(t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

a On a $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable car $1-x < 1$ donc g est intégrable sur $]0, 1]$.

b pour $t \in]0, 1[$, $g(t) = t^{x-1} \frac{1}{1-(-t)} = t^{x-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{n+x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$
avec $v_n(t) = (-1)^n t^{n+x-1}$.

c On a $\int_0^1 v_n(t) dt = (-1)^n \left[\frac{t^{n+x}}{n+x} \right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{x+n}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = f(x)$ donc

si on peut intervertir série et intégrale, on aura montré $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = f(x)$.

4. - Premier essai: interversion sur un intervalle quelconque:

on a $\int_0^1 |v_n(t)| dt = \frac{1}{x+n} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc on ne peut pas appliquer le théorème.

5. - Deuxième essai: interversion sur le segment $[0, 1]$: Pas possible car $\sum v_n(1)$ diverge grossièrement.

6. Troisième essai: théorème de convergence dominée:

On applique le th de CV dominée à $S_N(t) = \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{n+x-1}$

- On a $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(t) = g(t)$ donc la suite de fonctions (S_N) converge simplement vers g .

- S_N et g sont continues donc continues par morceaux sur $]0, 1]$ (Pb en 0 si $x < 1$).

- Domination: $S_N(t) = t^{x-1} \frac{1 - (-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$ donc $|S_N(t)| \leq t^{x-1} \frac{1+t^{N+1}}{1+t} \leq t^{x-1} \frac{2}{1+t} = \varphi(t)$ qui est continue et intégrable sur $]0, 1]$

donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt = \int_0^1 g(t) dt$.

Or $\int_0^1 S_N(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^N v_n(t) dt = \sum_{n=0}^N \int_0^1 v_n(t) dt$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t) dt$.

On en déduit $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t) dt = \int_0^1 g(t) dt$, ce qui correspond à ce qui est demandé.

7. Autre méthode: on pose $H(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$

a On a $H(x) + H(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \left[\frac{t^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

b On a $H(x) = \frac{1}{x} - H(x+1)$

$$H(x) = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x+1} - H(x+2) \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + H(x+2)$$

$$H(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \left(\frac{1}{x+2} - H(x+3) \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - H(x+3).$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{x+i} + (-1)^n \times H(x+n) : (P_n)$.

Vrai pour $n = 1$.

Supposons $H(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{x+i} + (-1)^n \times H(x+n)$

Alors $H(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{x+i} + (-1)^n \times \left(\frac{1}{x+n} - H(x+n+1) \right) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{x+i} + (-1)^{n+1} \times H(x+n+1)$.

c Appliquons le théorème de convergence dominée à paramètre continu avec $I =]0, 1[$ et $A = [1, +\infty[$

Posons $h(x, t) = \frac{t^{x-1}}{1+t}$

(H_1) : $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$ est CPM sur I

(H_2) : Si $t \in I$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{x-1} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0$

(H_3) : $\forall (x, t) \in A \times I, |h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t} = \varphi(t)$ et φ intégrable sur I car continue sur $[0, 1]$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \int_0^1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = 0$.

relation entre $H(x)$ et $H(x+n)$.

d $x > 0$ fixé. Par composition des limites, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H(x+n) = 0$ donc, en passant à la limite dans (P_n) ,

on obtient $H(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{x+i}$.

Suites de fonctions

Solution de l'exercice:

1. On a $u_1(x) = 1 + \int_0^x u_0(t - t^2) dt = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x$ et

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x u_1(t - t^2) dt = 1 + \int_0^x 1 + t - t^2 dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

2. La fonction u_0 est définie et continue sur $[0, 1]$.

Supposons u_n définie et continue sur $[0, 1]$.

Si $t \in [0, 1]$, alors $0 \leq t^2 \leq t$ donc $0 \leq t - t^2 \leq 1$ donc $t \mapsto u_n(t - t^2)$ est définie et continue sur $[0, 1]$ et $x \mapsto \int_0^x u_n(t - t^2) dt$ est une primitive de cette fonction sur $[0, 1]$ donc u_{n+1} est définie et de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc est continue.

3. On a $u_1(x) - u_0(x) = x = \frac{x^1}{1!}$.

Supposons $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\text{On a } u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t - t^2) dt - \int_0^x u_n(t - t^2) dt = \int_0^x (u_{n+1} - u_n)(t - t^2) dt.$$

$$\text{Par hypothèse de récurrence, } 0 \leq (u_{n+1} - u_n)(t - t^2) \leq \frac{(t - t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{On en déduit que } \int_0^x 0 dt \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt = \left[\frac{t^{n+2}}{(n+2)!} \right]_0^x = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

$$\text{Par récurrence, pour tout } n, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. Convergence simple de la suite de fonctions (u_n) .

(a) La série $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente et $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ donc la SATP $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$ converge.

(b) Soit $x \in [0, 1]$. Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_{k+1}(x) - u_k(x)$.

On a $S_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(x) - u_k(x) = u_n(x) - u_0(x)$. La série $\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$ converge donc la suite $(S_n(x))$ converge donc la suite $(u_n(x) - 1)$ converge donc la suite $(u_n(x))$ converge. La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement sur $[0, 1]$.

5. Convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) .

(a) Soit $x \in [0, 1]$ fixé, $n \in \mathbb{N}$ fixé et $p \in \mathbb{N}$, $p > n$.

$$\text{On a } \sum_{k=n}^{p-1} u_{k+1}(x) - u_k(x) = u_p(x) - u_n(x) \text{ et } \sum_{k=n}^{p-1} u_{k+1}(x) - u_k(x) \leq \sum_{k=n}^{p-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$$\text{donc } u_p(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n}^{p-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \text{ et en passant à la limite lorsque } p \text{ tend vers } +\infty$$

$$\text{on obtient } u(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

(b) On a $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x)$ donc la suite $(u_n(x))$ est croissante donc $u_n(x) \leq u(x)$.

$$\text{On a donc } 0 \leq u(x) - u_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \text{ (majoration indépendante de } x).$$

$$\text{On en déduit que } \|u - u_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}, \text{ reste de Cauchy d'une série convergente}$$

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n\|_\infty = 0.$$

On en déduit que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur $[0, 1]$.

De plus, $u(x) \geq u_0(x) = 1$ donc u n'est pas la fonction nulle.

6. Propriétés de la fonction u .

(a) La suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur $[0, 1]$ et pour tout n la fonction u_n est continue donc la fonction u est continue.

(b) Soit $x \in [0, 1]$. Passons à la limite dans l'égalité $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}(x) = u(x)$.

Posons $v_n(t) = u_n(t - t^2)$ et $v(t) = u(t - t^2)$. La fonction u_n est continue donc v_n est continue.

Pour $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) = v(t)$ et $|v_n(t) - v(t)| = |u_n(t - t^2) - u(t - t^2)| \leq \|u_n - u\|_\infty$

donc $\|v_n - v\|_\infty \leq \|u_n - u\|_\infty$.

La suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur $[0, 1]$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$ donc la suite de fonctions (v_n) converge uniformément vers v sur $[0, 1]$ donc sur $[0, x]$.

Par application du théorème d'interversion limite-intégrale sur le segment $[0, x]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x u_n(t - t^2) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x v_n(t) dt = \int_0^x \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) dt = \int_0^x v(t) dt = \int_0^x u(t - t^2) dt.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}(x) = u(x)$ donc $u(x) = 1 + \int_0^x u(t - t^2) dt$.

(c) La fonction $x \mapsto \int_0^x u(t - t^2) dt$ est une primitive de la fonction continue $x \mapsto u(x - x^2)$ donc est de classe C^1 . On en déduit que u est de classe C^1 et, en dérivant la relation de la question précédente, que $\forall x \in [0, 1], u'(x) = u(x - x^2)$.