MATHÉMATIQUES

Corrigé du devoir surveillé n°7(PC*)/ 8 (PSI) **STANDARD**

SOLUTION DU PROBLÈME 1 (MORCEAUX DE E3A PSI 2016, ÉPREUVE 2)

Q1. Une intégration par parties donne : $J_s = \left[\frac{t^{s+1}}{s+1}\ln(t)\right]_{t\to 0}^{t=1} - \frac{1}{s+1}\int_0^1 t^s\,dt = \boxed{-\frac{1}{(s+1)^2}}$.
où le crochet converge en 0 (nul par croissances comparées) ainsi que la seconde intégrale (par calcul puisque $s>-1$).
Donc l'intégration par partie est licite.

Q2. En posant $f_x\ :\ t\mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ la fonction H est définie en x si seulement si l'intégrale $\int_0^1 f_x$ converge. Or :

- f_x est $\boxed{\text{continue par morceaux (car continue) sur }]0,1[,}$;
- $\boxed{\text{En } 0,}$ on a : $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} -t^x\ln(t)\boxed{\geqslant 0}$, or cette dernière fonction est d'intégrale convergente (cf. **Q1.**),
  donc, $\boxed{\text{par théorème de comparaison,}}$ l'intégrale $\int_0^1 f_x$ converge en 0 si $x>-1$.
  Et si $x\leqslant 1$, on a $tf_x(t) \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$ *i.e.* $\frac{1}{t} = \mathrm{o}\,(f_x(t))$.
  Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge et que tout est positif, par th. de comparaison $\int_0^1 f_x$ diverge.
- $\boxed{\text{En } 1,}$ comme $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$, on a $f_x(t) \underset{t\to 1}{\sim} t^x$,
  donc f_x se prolonge par continuité en 1 (pour tout $x\in\mathbb{R}$).
  Donc l'intégrale est $\boxed{\text{faussement impropre}}$ en 1.

Ainsi : $\boxed{D_H =]-1,+\infty[.}$

Q3. Si $x\leqslant y$ alors pour tout $t\in]0,1[$, on a : $t^x = \exp(x\ln(t)) \geqslant \exp(y\ln(t)) = t^y$ (car $\ln(t)\leqslant 0$).
On multiplie alors par $\frac{\ln(t)}{t-1}\geqslant 0$ et on intègre sur $]0,1[$ quand $x>-1$, par croissance de l'intégration, on obtient :

$$\forall x,y\in]-1,+\infty[,\ \ H(x)\geqslant H(y).$$

Ainsi $\boxed{H \text{ est décroissante}}$ sur son domaine de définition.
Remarque : anticiper la question **Q5.** est une mauvaise idée ici...

Q4. La fonction proposée est continue sur $]0,1[$, de limite nulle en 1 (car $\ln(t) \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)$)
et de limite nulle en 0 (par croissances comparées et car $\alpha>0$).
Ainsi, cette fonction est prolongeable en une $\boxed{\text{fonction continue sur le segment } [0,1].}$
D'après le théorème des bornes atteintes ce prolongement et donc borné (et atteint ses bornes).

Q5. On utilise le $\boxed{\text{th. de dérivation d'une intégrale à paramètre sur un segment } [a,b]\subset D_H =]-1,+\infty[\ :}$

- $\forall x\in[a,b],\ t\mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ (cf. **Q1.**) ;
- $\forall t\in]0,1[,\ x\mapsto \frac{t^x\ln(t)}{t-1}$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $x\mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$ (évident) ;
- $\forall x\in[a,b],\ t\mapsto \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ (évident) ;
- $\forall x\in[a,b],\ \forall t\in]0,1[,\ \left|\frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\right| \leqslant \frac{t^a(\ln(t))^2}{1-t}$.
  Or le majorant est continu sur $]0,1[$ et borné (cf. **Q4.**) et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.

Ainsi le théorème s'applique ; il indique que $H\in C^1(]-1,+\infty[)$ et que :

$$\forall x>-1,\ H'(x) = \int_0^1 \frac{t^x(\ln(t))^2}{t-1}\,dt$$

La fonction intégrée étant négative, $H'(x)$ aussi est négative si $x\in]-1,+\infty[$; on retrouve que H décroît.

Q6. On utilise le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée à paramètre réel}}$ avec la fonction définie par :

$$\forall t\in]0,1[,\forall x\geqslant 0,\ \ f(x,t) = \frac{t^x\ln(t)}{t-1}.$$

- Pour tout $x\geqslant 0$ la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ car continue.
- Pour tout $t\in]0,1[$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 = \ell(t)$.
- La fonction limite ℓ est continue par morceaux sur $]0,1[$ (fonction nulle).
- On a : $\forall t\in]0,1[,\ \forall x\geqslant 0,\ |f(x,t)|\leqslant |f(0,t)|$,
  où $t\mapsto f(0,t)$ est intégrable d'après **Q2.** (car positive et d'intégrale convergente)

Ainsi le théorème s'applique ; il indique que : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0.}$

Autre idée (sans utiliser de théorème d'interversion) :
Soit $x>0$. La fonction $g\ :\ t\mapsto \frac{t\ln(t)}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 0) et 1 (valeur 1). C'est donc une fonction bornée sur $]0,1[$. Une majoration grossière donne :

$$\forall x>0,\ |H(x)|\leqslant \|g\|_\infty \int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{\|g\|_\infty}{x}$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} H(x) = 0$ par théorème d'encadrement.

Q7. Par linéarité de l'intégration et d'après **Q1.** , on a :

$$H(x) - H(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)\ln(t)}{t-1}\,dt = -J_x = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Q8. Comme $\boxed{H \text{ est continue en } 0}$ (puisqu'elle est $\mathcal{C}^1$ d'après **Q5.**), on a : $H(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} H(0)$.
Donc $H(x+1) \underset{t\to-1}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$; ainsi la question précédente donne : $\boxed{H(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}.}$

Q9. (a) Par $\boxed{\text{théorème de comparaison pour les séries}}$ puisque : $\frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$,
où ce dernier est le terme général d'une $\boxed{\text{série à termes positifs}}$ convergente (de RIEMANN).

(b) Montrons $\boxed{\text{par récurrence}}$ sur $n\geqslant 1$ la relation $H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

- <u>Initialisation</u> : pour $n=1$, c'est exactement **Q7.** .
- <u>Hérédité</u> : soit $n\geqslant 1$ tel que le résultat est vrai au rang n.

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) \qquad \text{(hyp. de récurrence)}\\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + \frac{1}{(x+n+1)^2} + H(x+n+1) \qquad (\textbf{Q7.}\ \text{ en remplaçant } x \text{ par } x+n)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1). \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat au rang $n+1$.

Autre rédaction : télescopage en sommant $H(x+k-1) - H(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2}$ de $k=1$ à $k=n$.

(c) Comme H est de limite nulle en $+\infty$ (cf. **Q6.**) et comme la série converge, on peut faire tendre n vers $+\infty$, ce qui donne bien :

$$\boxed{H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.}$$

(d) En particulier pour $x=0$ et en utilisant le résultat fourni , puis avec **Q7.** , on obtient :

$$\boxed{H(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}} \quad \text{puis} \quad \boxed{H(1) = H(0) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$$

Q10. La fonction $h_x\ :\ t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ décroît sur $]-x,+\infty[$ et donc sur $]1,+\infty[$. Par croissance de l'intégration, on en déduit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ h_x(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} h_x(t)\,dt \leqslant h_x(k)$$

c'est à dire : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(x+k)^2}.}$

Autre idée : on a $\displaystyle\int_k^{k+1} h_x = \left[\ -\tfrac{1}{x+t}\ \right]_k^{k+1} = \dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)}$.

D'où le résultat puisque $(x+k)^2 \leqslant (x+k)(x+k+1) \leqslant (x+k)^2$ (car $x+k>0$).

Q11. Sommons ces inégalités pour $k=1,2,\dots,n$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{dt}{(x+t)^2} = \left[-\frac{1}{t+x}\right]_{t=1}^{t=n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Tous les termes admettent une limite quand $n \to +\infty$ et le passage à la limite donne

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant H(x)$$

soit encore : $\dfrac{1}{1+x} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2}$

Par $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ on en déduit que $xH(x)$ tend vers 1 *i.e.* : $\boxed{H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}.}$

Q12. (a) Par $\boxed{\text{th. de comparaison pour les séries}}$ la série $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ puisque : $u_n = H(n) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, et car ce dernier est le terme général d'une série à termes positifs divergente (harmonique).

Comme H est à valeurs positives la série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée, et la suite (u_n) est décroissante (car H est décroissante cf. **Q3.** ou **Q5.**) et tend vers 0 (cf. **Q6.**).

Donc le $\boxed{\text{théorème sur les séries alternées (règle de Leibniz)}}$ permet de conclure que la série $\boxed{\sum((-1)^n u_n) \text{ converge.}}$

(b) La divergence de la série précédente dissuade d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonction.

On utilise plutôt le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée}}$ avec la suite de fonctions définie sur $]0,1[$ par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \qquad \text{avec } f_n(t) = (-1)^n \frac{t^n \ln(t)}{t-1}.$$

- On a : $\forall n,\ f_n \in C^0_{mor}(]0,1[)$, donc S_n aussi.
- La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et sa somme simple est $S : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2-1}$ (on reconnaît que $\sum((-1)^n t^n)$ est une série géométrique de raison $-t$ telle que $|-t|<1$).
- Cette fonction S est continue par morceaux (car continue) sur $]0,1[$.
- Pour tout n, t, on a : $|S_n(t)| = \left|\dfrac{(1-(-t)^{n+1})\ln(t)}{t^2-1}\right| \leqslant \dfrac{2|\ln(t)|}{1-t^2}$, où le majorant ne dépend pas de n, est continu sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (valeur 1) et en $o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ au voisinage de 0 (équivalent à $\ln(t)$). Il est donc intégrable sur $]0,1[$.

Ainsi le théorème s'applique et l'on a : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n} = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n = \int_0^1 S \boxed{= \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,dt.}$

(c) Comme $v \mapsto v^2$ est $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ strictement croissant et bijectif de }]0,1[\text{ sur }]0,1[,}$ on peut effectuer le $\boxed{\text{changement de variable } u = v^2}$ qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\,dv = \int_0^1 \frac{\ln(\sqrt{u})}{u-1}\,\frac{du}{2\sqrt{u}} = \boxed{\frac{1}{4}H\left(-\frac{1}{2}\right).}$$

Exercice 2 :

Pour $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

Q1. On a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge.

Si $x>0$ alors $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} > 0$. On a $\alpha > 0$ donc $\alpha+1>1$ donc, par comparaison, la série $\sum u_n(x)$ converge.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

Q2. Si $0 < a \leqslant x \leqslant b$ $1+nx^2 \geqslant 1+na^2 > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{1+nx^2} \leqslant \dfrac{1}{1+na^2}$

donc $|u_n(x)| \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \leqslant \dfrac{x}{n^\alpha 1 + na^2} \leqslant \dfrac{b}{n^\alpha(1+na^2)}$.

Donc u_n est bornée sur $[a,b]$ et $\|u_n\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)| \leqslant \dfrac{b}{n^\alpha(1+na^2)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{b}{a^2}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\alpha+1>1$

Par comparaison, la série $\sum \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge donc la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Q3. la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ donc la fonction S est continue sur $[a,b]$ avec $0<a<b$ quelconques donc S est continue sur $]0,+\infty[$.

Q4. Si $x>0$ on a $0 \leqslant u_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \leqslant \dfrac{x}{n^{\alpha+1}x^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge donc $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.

On a donc $0 \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{K}{x}$. avec $K = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$, donc, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

Q5. La fonction u_n est dérivable (th opérations) et $u_n'(x) = \dfrac{1}{n^\alpha}\dfrac{(1+nx^2) - x\times 2nx}{(1+nx^2)^2} = \dfrac{1}{n^\alpha}\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$.

Or $1-nx^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 \leqslant \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (car $x\geqslant 0$) donc (tableau de variation de u_n)

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

On a donc $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge donc si et seulement si $\alpha+\frac{1}{2} > 1$ soit $\alpha > \frac{1}{2}$.

Q6. Appliquons le th d'interversion série $\int$ sur un segment :
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est continue
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$ donc sur $[0,1]$ car $\alpha > \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u_n(x)\,dx\right)$.

Or $\int_0^1 u_n(x)\,dx = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1}}\int_0^1 \dfrac{2nx}{(1+nx^2)}dx = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1}}\left[\ln\left(1+nx^2\right)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1}}\ln(1+n)$.

On en déduit que $\int_0^1 S(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{n^{\alpha+1}}$.

Q7. Soit $x>0$.

a La convergence normale sur $[0,+\infty[$ entraîne la continuté sur $[0,+\infty[$ donc en 0.

b La fonction $u : t \mapsto x\sqrt{t}$ est de classe C^1 et strictment croissante sur $[1,+\infty[$.

Sous réserve de convergence le chagement de variable donne

$I = \int_1^{+\infty} \dfrac{2}{\left(1+\left(\sqrt{t}x\right)^2\right)}\dfrac{x}{2\sqrt{t}}dt = \int_x^{\lim_{t\to+\infty} u(t)} \dfrac{2}{1+u^2}du = \int_x^{+\infty}\dfrac{2}{1+u^2}du = [2\arctan(u)]_x^{+\infty}$ donc

$I = 2\dfrac{\pi}{2} - 2\arctan(x) \to_{A\to+\infty} \pi - 2\arctan(x)$ donc

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{t}\,(1+tx^2)}dt$ converge et a pour valeur $\pi - 2\arctan(x)$

c Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$. $0 < \sqrt{k}\left(1+kx^2\right) \leqslant \sqrt{t}\left(1+tx^2\right)$ donc $0 < \dfrac{1}{\sqrt{t}\left(1+tx^2\right)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)}$.

En intégrant entre k et $k+1$, on a $\int_k^{k+1} \dfrac{1}{\sqrt{t}\left(1+tx^2\right)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)}$.

En sommant ces inégalités pour $k \in [[1, n]]$ et en multipliant par x ($x > 0$)

on obtient $\int_1^{n+1} \dfrac{x}{\sqrt{t}\left(1+tx^2\right)} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)}$.

On peut passer à la limite quand n tend vers l'infini :

- dans le membre de gauche (convergence de l'intégrale de la question précédente)
- dans le membre de gauche (somme partielle de $\sum u_n(x)$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$).

On en déduit $S_{\frac{1}{2}}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)} \geqslant \int_1^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{t}\left(1+tx^2\right)} dt = \pi - 2\arctan(x)$

où $S_{\frac{1}{2}}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)}$ (soit $S(x)$ lorsque $\alpha = \dfrac{1}{2}$).

Si $S_{\frac{1}{2}}$ était continue en 0, on pourrait passer à la limite dans l'inégalité précédente et on obtiendrait que $S(0) \geqslant \pi$. Or $S(0) = 0$ donc S n'est pas continue en 0.

d On a $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ donc $1 \leqslant k^\alpha \leqslant \sqrt{k}$ entraîne $\dfrac{x}{k^\alpha\left(1+kx^2\right)} \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{k}\left(1+kx^2\right)}$ et en sommant,

$S(x) \geqslant S_{\frac{1}{2}}(x) \geqslant \pi - 2\arctan(x)$.donc S n'est pas continue en 0 (idem b).

Q8. Appliquons le th de dérivation des sommes de séries de fonctions

- Pour tout n la fonction u_n est de classe C^1 et $u_n'(x) = \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1-nx^2}{\left(1+nx^2\right)^2}$.
- La série donc fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. (déjà vu)
- Soit $a > 0$. Etudions la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$.

Si $a \leqslant x$ alors $|u_n'(x)| = \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{\left|1-nx^2\right|}{\left(1+nx^2\right)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1+nx^2}{\left(1+nx^2\right)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha\left(1+nx^2\right)} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha\left(1+na^2\right)}$.

On en déduit que $0 \leqslant \|u_n'\|_\infty^{[a,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha\left(1+na^2\right)} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a^2} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Or $\alpha > 0$ donc $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge donc $\sum \|u_n'\|_\infty^{[a,+\infty[}$ converge et donc

la série de fonction $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

On en déduit que fonction S est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ quelconque

donc S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1-nx^2}{\left(1+nx^2\right)^2}$.

Si $x \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ alors $1 - nx^2 \leqslant 0$ donc $S'(x) \leqslant 0$ donc S est décroissante sur $[1; +\infty[$.

Q9. On suppose $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

a Si $2n \geqslant k \geqslant n+1$ alors $u_k\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{k^\alpha\left(1+\dfrac{k}{n+1}\right)}$.

et $\dfrac{k}{n+1} \leqslant \dfrac{2n}{n+1} \leqslant \dfrac{2n+2}{n+1} = 2$ donc $0 < 1 + \dfrac{k}{n+1} \leqslant 3$ et $0 < k^\alpha \leqslant \sqrt{k}$ (car $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$)

donc $0 < k^\alpha\left(1+\dfrac{k}{n+1}\right) \leqslant 3\sqrt{k}$ donc $0 < \dfrac{1}{3\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha\left(1+\dfrac{k}{n+1}\right)}$ donc

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{3\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{3\sqrt{n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

b Comme. $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (nb de termes fois plus petit)

donc $R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geqslant \dfrac{1}{3\sqrt{n+1}} \times \dfrac{n}{\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$: $(\mathcal{R})$.

Si la série de fonction $\sum u_n$ convergeait uniformément, on aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.

Or $0 \leqslant \left|R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| \leqslant \|R_n\|_\infty$ et en passant à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$.

Ce qui contredit $(\mathcal{R})$ donc la série de fonction $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 :

Q1. Pour tout $n \geqslant 2$, si $A = \lambda I_n$ est une matrice scalaire, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour toute matrice inversible P, on a :

$$P^{-1}AP = P^{-1}\lambda I_n P = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n = A$$

donc

$$\mathcal{S}(A) = \{A\}$$

Q2. Les matrices M_k et A sont semblables ont même spectre donc $\det(\lambda I_n - M_k) = 0$.

Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda I_n - M_k = \lambda I_n - B$ et le déterminant est continu donc (th de composition des limites)

$$\det(\lambda I_n - B) = \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - M_k) = 0$$

On a donc $\lambda \in sp(B)$ donc $sp(A) \subset sp(B)$.

Q3. A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

a D'après la question précédente ; $sp(A) \subset sp(B)$ donc B admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme valeurs propres et est de taille n donc ne peut pas avoir d'autres valeurs propres donc B admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. et $sp(B) = sp(A)$.

b Les matrices A et B sont toutes semblables à $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ donc sont semblables donc $B \in \mathcal{S}(A)$ donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $S(A)$ est fermée.

Q4. On suppose que $sp(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas diagonalisable.

a Soit u canoniqement associé à A et v_1 un vecteur propre de u complété en une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de u dans cette base est de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Or $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, donc $\beta = \lambda$.

De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon A est semblable à λI_2 donc égal à λI_2 (question 1) donc A serait diagonalisable.

On en déduit qu'il existe $\alpha \neq 0$,tel que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

b La famille $(\alpha e_1, e_1)$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car $\alpha \neq 0$.

On a $\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = \alpha e_1 + \lambda e_2 \end{cases}$ donc (par linéarité) $\begin{cases} f(\alpha e_1) = \lambda(\alpha e_1) \\ f(\beta e_2) = \beta(\alpha e_1) + \lambda(\beta e_2) \end{cases}$

donc $mat_{(\alpha e_1, e_1)}(f_\alpha) = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = T_\beta$.

c On a A semblable à T_a (d'après a) et T_a semblable à $T_{\frac{1}{n}}$ (d'après b) donc A est semblable à $T_{\frac{1}{n}}$.

donc $T_{\frac{1}{n}} \in S(A)$.

d D'après la question précédente, $T_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{S}(A)$. Par ailleurs

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 \notin \mathcal{S}(A)$$

donc, par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\mathcal{S}(A) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$