

MATHÉMATIQUES

Devoir surveillé n°7 (en PC*) ou n°8 (en PSI) **SUJET STANDARD**

Durée 4h – Calculatrices interdites

Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**. Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté. Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), **le numéro de cette question devra être mentionné clairement**. Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale. **Les résultats seront encadrés.**

Problème 1

PARTIE I

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens : $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$.

Q1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t) dt$ existe et donner sa valeur.

Étude de la fonction H

Q2. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

Q3. Montrer que H est monotone sur D_H .

Q4. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{t^\alpha (\ln(t))^2}{t-1}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0, 1]$.

Q5. Démontrer que H est de classe C^1 sur D_H . Retrouver alors la monotonie de H .

Q6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

Q7. Démontrer que : $\forall x > -1, H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Q8. En déduire un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Q9. Soit $x > -1$.

(a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

(b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

(c) En déduire que : $H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

(d) Calculer $H(0)$ et $H(1)$ — en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II

Q10. Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

Q11. Trouver une constante $K > 0$ telle que $H(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{x}$.

Q12. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = H(n)$.

(a) Etudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$

(b) Démontrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2 - 1} dv$.

(c) Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 :

Pour $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)}$.

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

On pose, pour $x \geq 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Q2. Soit deux réels a et b vérifiant $0 < a < b$.

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Q3. Montrer que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.

Q4. Etudier l'existence et l'éventuelle valeur de la limite en $+\infty$ de la fonction S (on pourra précéder par encadrement).

Q5. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Q6. On suppose que $\alpha > \frac{1}{2}$. Déterminer deux réels β et γ tels que $\int_0^1 S(x) dx = \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^\beta}$.

Q7. Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
En déduire que S est décroissante sur $[1, +\infty[$

Q8. Etude de la continuité en 0 de S .

a On suppose que $\alpha > \frac{1}{2}$ la fonction S est-elle continue en 0 ?

b Justifier que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt$ converge et a pour valeur $\pi - 2 \arctan(x)$.

c On suppose que $\alpha = \frac{1}{2}$. En déduire que la fonction S n'est pas continue en 0.

d On suppose que $\alpha < \frac{1}{2}$. Montrer que la fonction S n'est pas continue en 0.

Q9. On suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour $x \in [0, +\infty[$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

a Montrer que $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \geq \frac{1}{3\sqrt{n+1}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

b En déduire que la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 :

Dans cet exercice

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- n est un entier supérieur ou égal à 2
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- La matrice identité d'ordre n est notée I_n
- $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire
- Si M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $sp(M)$ le spectre de M .

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle classe de similitude de A l'ensemble $\mathcal{S}(A)$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à A :

$$\mathcal{S}(A) = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{K})\}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés topologiques de $\mathcal{S}(A)$.

Q1. Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans **Q2.** et **Q3.** on se donne $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda \in sp(A)$ alors $\lambda \in sp(B)$.

Q3. **On suppose dans cette question que A admet n valeurs propres distinctes.**

- a Justifier que B est diagonalisable et que $sp(B) = sp(A)$.
- b Montrer que $\mathcal{S}(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q4. On suppose dans cette question que :

- $n = 2$,
- A admet une unique valeur propre λ ,
- A n'est pas diagonalisable.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $T_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a Soit u l'endomorphisme canoniquement à A .

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de u est T_α

b Soit f_α l'endomorphisme canoniquement associé à T_α .

Soit $\beta \in \mathbb{R}^*$. Déterminer la matrice de u dans la base $(\alpha e_1, \beta e_2)$.

c En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{S}(A)$.

d La partie $\mathcal{S}(A)$ est-elle une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

FIN du DEVOIR