MATHÉMATIQUES

Corrigé du devoir surveillé n°7(PC*)/ 8 (PSI) **BIS**

Problème 1 : (adapté de EPITA - 2025 - Option MP)

Préliminaire

Q1. Pour tout $n \geqslant 2$, si $A = \lambda I_n$ est une matrice scalaire, avec $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour toute matrice inversible P, on a :

$$P^{-1}AP = P^{-1}\lambda I_n P = \lambda P^{-1}P = \lambda I_n = A$$

donc

$$\mathcal{S}(A) = \{A\}$$

Partie I : Etude du caractère fermé de $\mathcal{S}(A)$ lorsque A est diagonalisable

Q2. Les matrices M_k et A sont semblables ont même spectre donc $\det(\lambda I_n - M_k) = 0$.
Or $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda I_n - M_k = \lambda I_n - B$ et le déterminant est continu donc (th de composition des limites)

$$\det(\lambda I_n - B) = \lim_{k\to+\infty} \det(\lambda I_n - M_k) = 0$$

On a donc $\lambda \in sp(B)$ donc $sp(A) \subset sp(B)$.

Q3. A admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $sp(A) \subset sp(B)$ donc B admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme valeurs propres et est de taille n donc ne peut pas avoir d'autres valeurs propres donc B admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable.
Les matrices A et B sont d'ordre n donc toutes deux semblables à $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ donc $B \in \mathcal{S}(A)$.
On en déduit, par caractérisation séquentielle des fermés, que $S(A)$ est fermée.

Q4. A étant diagonalisable, $sp(A) \neq \emptyset$.
• Si A admet deux valeurs propres distinctes alors $S(A)$ est fermée d'après la question précédente.
• Si A admet une unique valeur propre λ alors A étant diagonalisable, elle est semblable à λI_2 donc égale à λI_2 donc $S(A) = \{A\}$ (d'après la première question) est fermé.

Q5. Soit Q un polynôme annulateur de A.
Pour tout $k \in \mathbb{N}, M_k \in \mathcal{S}(A)$ donc il existe une matrice inversible P telle que $M_k = P^{-1}AP$.
On montre alors classiquement que, $Q(M_k) = P^{-1}Q(A)P = 0$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, L'application $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightharpoonup \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M^i \end{array}\right.$ est continue car le produit matricel est continu.
On en déduit que $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightharpoonup \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto Q(M) \end{array}\right.$ est continue (comme combaison linéaire des applications précédentes)
Par composition des limites, ainsi :

$$Q(B) = Q\left(\lim_{k\to+\infty} M_k\right) = \lim_{k\to+\infty} Q(M_k) = 0$$

REMARQUE. — Contrairement à l'application $\left\{\begin{array}{c} \mathbb{K} \rightharpoonup \mathbb{K} \\ x \mapsto Q(x) \end{array}\right.$ dont la continuité est un résultat de cours, la continuité de $\left\{\begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightharpoonup \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto Q(M) \end{array}\right.$ n'est pas un résultat de cours et a donc été démontré.

Q6. Soit p le nombre des valeurs propres de A et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de A

a Comme A est diagonalisable, $Q = \prod\limits_{\lambda\in sp(A)} (X - \lambda)$ est polynôme annulateur scindé à racines simples de A.
D'après la question précèdente Q (scindé à racines simples) est un polynôme annulateur de B donc
• B est diagonalisable
• $sp(B)$ est contenu dans l'ensemble des racines de Q donc dans $sp(A)$.
On a donc $sp(A) = sp(B)$ (d'après Q **Q2.**)

b D'une part :
La matrice A est diagonalisable donc on peut aussi diagonaliser A^i et en déduire $tr\left(A^i\right) = \sum\limits_{i=j}^{p} m_j\lambda_j^i$.

Or M_k est semblable à A donc $(M_k)^i$ est semblable à A^i donc $tr\left((M_k)^i\right) = \sum\limits_{i=j}^{p} m_j\lambda_j^i$.

L'application trace est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension finie donc continue.
$M \mapsto M^i$ est continue donc $M \mapsto tr\left(M^i\right)$ est continue donc par composition des limites

$$tr\left(B^i\right) = \lim_{k\to+\infty} tr\left((M_k)^i\right) = \sum_{j=1}^{p} m_j\lambda_j^i.$$

D'autre part, la matrice B est diagonalisable et $sp(A) = sp(B)$ donc de même

$$tr\left(B^i\right) = \sum_{j=1}^{p} m'_j\lambda_j^i.(\text{avec } m'_1, \ldots, m'_p \text{ multiplicitées de } \lambda'_1, \ldots, \lambda'_p)$$

c Les égalités obtenues précédemment $\sum\limits_{j=1}^{p} m_j\lambda_j^i. = \sum\limits_{j=1}^{p} m'_j\lambda_j^i$, pour $i \in [[0, p-1]]$ s'écrivent matriciellement

$$V\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = V\begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_p \end{pmatrix} \text{ avec } V \text{ matrice de Vandermonde associée à } (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$$

La matrice V est inversible car $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont deux à deux distincts donc $\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_p \end{pmatrix}$.
Or, A et B sont diagonalisables donc $\dim\left(E_{\lambda_j}(A)\right) = m_j = m'_j = \dim\left(E_{\lambda_j}(B)\right)$.
On en déduit que A et B sont semblables à une même matrice diagonale donc sont semblables.
Ainsi, $B \in \mathcal{S}(A)$ donc

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

Q7. Pour tout x un vecteur non nul de E, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.
On fixe x non nul.
Si $y \in E$ est colinéaire à x, on écrit $y = \mu x$ et $u(y) = u(\mu x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y$.
Si $y \in E$ est non colinéaire à x, alors (x, y) est une famille libre et

$$u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y \text{ et } \quad u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

et (x, y) étant libre, par identification des coefficients, $\lambda_y = \lambda_{x+y} = \lambda_x$.
Ainsi, u est une homothétie de rapport λ_x.

Q8. Si u n'est pas une homothétie, il existe un vecteur x tel que $(\ x, u(x)\ )$ est libre (question précédente).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, la famille $(\ \alpha x, u(x)\ )$ est aussi libre et, d'après le théorème de la base incomplète, elle se complète en une base de $\mathbb{K}^n$. Par construction, la matrice de u dans cette base a pour première colonne :

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Q9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La question précédente montre que, si A est une matrice non scalaire, alors A est semblable à une matrice B_k dont la première colonne est C_k telle que définie à la question précédente.
En utilisant la notation $\|M\|_\infty = \sup_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1;p]]} |m_{i,j}|$ pour toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
on a. $\|B_k\|_\infty \geqslant \|C_k\|_\infty = k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$
mais $B_k \in \mathcal{S}(A)$ donc $\mathcal{S}(A)$ est non bornée.
Réciproquement, si A est une matrice scalaire, alors $\mathcal{S}(A) = \{A\}$ d'après la question 1 de la première partie, et donc $\mathcal{S}(A)$ est bornée.
En conclusion :
$\mathcal{S}(A)$ est bornée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.

Q10. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on avait $\|M\| = \|P^{-1}MP\|$ alors $\mathcal{S}(M)$ serait bornée donc M serait une matrice scalaire, ce qui contredit le fait que M est quelconque.
Il n'existe donc pas de norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude,

Partie III : Etude plus générale du caractère fermé de $\mathcal{S}(A)$

Cas n=2

Q11. On suppose que $sp(A) = \{\lambda\}$ et A n'est pas une matrice scalaire.

a Soit u canoniqement associé à A et e_1 un vecteur propre de u complété en une base (e_1, e_2) de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
La matrice de u dans cette base est de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
Or $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, donc $\beta = \lambda$.
De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon A est semblable à λI_2 donc égal à λI_2 (question 1) donc matrice scalaire.
On en déduit qu'il existe $\alpha \neq 0$,tel que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Or La matrice de u dans la base $\left(e_1, \frac{1}{\alpha} e_1\right)$ est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ donc
toutes les matrices de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ sont semblables.
En conclusion :

$$A \text{ est semblable à toute matrice de la forme } T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1/n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, $T_n \in \mathcal{S}(A)$. Par ailleurs

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2 \notin \mathcal{S}(A)$$

donc, par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\mathcal{S}(A) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Q12. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et on note λ_1, λ_2 ses racines, éventuellement confondues.
Dans ce cas, on sait que
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, il suit de la question **Q3.** que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2$, il suit des questions 1 et de la question précédente que $\mathcal{S}(A)$ est fermée si, et seulement si, A est une matrice scalaire.
En conclusion :

$$\mathcal{S}(A) \text{ est fermée dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ si, et seulement si, } A \text{ est diagonalisable.}$$

Cas n=2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Q13. On suppose que $sp(A) = \emptyset$.

a La famille $(e_1, u(e_1))$ est libre car sinon $u(e_1) \in \mathrm{vect}(e_1)$ de sorte que e_1 est un vecteur propre pour u, ce qui contredit le fait que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.
Par dimension $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
La matrice de u dans la base $(e_1, u(e_1))$ est de la forme $A' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et A' est semblable à A donc de même trace et de même déterminant donc $\alpha = -\det(A)$ et $\beta = tr(A)$.

$$\text{La matrice de } u \text{ dans la base } (e_1, u(e_1)) \text{ est donc } \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$$

On peut aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_u = \chi_A = X^2 - tr(A)X + \det(A)$ donc $u^2 - tr(A)u + \det(A)id = 0$ donc $u^2(e_1) = tr(A)u(e_1) - \det(A)e_1$.

b L'invariance de la trace et du déterminant par similitude impliquent que :

$$\mathrm{tr}(M_k) = \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(M_k) = \det(A)$$

et, par continuité de la trace et du déterminant :

$$\mathrm{tr}(B) = \lim_{k\to+\infty} \mathrm{tr}(M_k) = \mathrm{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(B) = \lim_{k\to+\infty} \det(M_k) = \det(A).$$

Or $\chi_B = X^2 - tr(B)X + \det(B)$ donc $\chi_B = \chi_A$ donc $sp(B) = \emptyset$ donc d'après le a, B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\det(B) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}$. Et puisque A est semblable à cette même matrice, il s'ensuit que $B \in \mathcal{S}(A)$.
Par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\mathcal{S}(A) \text{ est fermé.}$$

Q14. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors le raisonnement mené dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dans **Q12.** peut être refait dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et conduit à :
$\mathcal{S}(A)$ est fermée si, et seulement si A est diagonalisable.
- Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors χ_A admet deux racines complexes non réelles conjuguée donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathcal{S}(A)$ est fermée (question précédente).
En conclusion :
$\mathcal{S}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est diagonalisable ou $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

Cas n quelconque et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Q15. On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

a La famille $\mathcal{B}_k$ est de rang identique à la famille $(b_1, \dots, b_n)$ donc de rang n donc base de $\mathbb{C}^n$.
En outre, pour tout $j \in [[0, n-1]]$, on a :

$$u\left(\frac{b_j}{k^{j-1}}\right) = \frac{1}{k^{j-1}} u(b_j) = \frac{1}{k^{j-1}} \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} b_i = \sum_{i=1}^{j} t_{i,j} k^{i-j} t_{i,j} \frac{b_i}{k^{i-1}}$$

de sorte que, si on note $T^{(k)} = \left(t_{i,j}^{(k)}\right)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_k$, on a :

$$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \quad t_{i,j}^{(k)} = k^{i-j} t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{t_{i,j}}{k^{j-i}} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}.$$

b En particulier,

$$T^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\to} D = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Mais pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T^{(k)}$ est semblable à A donc $\left(T^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers D.
La classe de similitude $\mathcal{S}(A)$ étant supposée fermée, $D \in \mathcal{S}(A)$ donc A est semblable à D donc diagonalisable.
Conclusion : • Si $\mathcal{S}(A)$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est diagonalisable.

• Il y a donc équivalence car l'autre sens a déjà été vu.

Partie IV : Application

Q16. Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension fine, $\mathcal{F}$ une partie fermée non vide de E.
Soit $a \in \mathcal{F}$ et $u \in E$.

a On a $\mathcal{F}_r = \mathcal{F} \cap B_f(a,r)$ ($B_f(a,r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r).
L'ensemble $\mathcal{F}_r$ est une partie fermée (intersection de deux fermés) et bornée (contenue dans une boule).
L'application $\varphi : x \mapsto \|x-u\|$ est continue sur E car la norme est continue.
L'application φ admet donc un minimum sur $\mathcal{F}_r : \exists x_r \in \mathcal{F}_r, \forall x \in \mathcal{F}_r, \|u-x\| \geqslant \|u-x_r\|$.

b Soit $x \in \mathcal{F}$.
Si $x \in \mathcal{F}_r$, $\|u-x\| \geqslant d_r$ par définition de x_r.
Si $x \notin \mathcal{F}_r$ alors $\|u-x\| = \|(u-a)-(x-a)\| \geqslant |\|(u-a)\| - \|(x-a)\|| \geqslant \|(x-a)\| - \|(u-a)\|$
donc $\|u-x\| \geqslant \|(u-a)\|$ car $\|(x-a)\| \geqslant 2\|u-a\|$.
Or $a \in \mathcal{F}_r$ donc $\|u-a\| \geqslant d_r$.
On en déduit que $\forall x \in \mathcal{F}, \|u-x\| \geqslant d_r$.

Q17. On considère la norme usuelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\|M\| = \sqrt{tr\,(M \times M^T)}$.
En appliquant la question précédente à la partie $\mathcal{S}(A)$ qui est bien fermée (question **Q6.**), on obtient :

$$\exists B \in \mathcal{S}(A), \forall C \in \mathcal{S}(A), \|M_0 - C\| \geqslant \|M_0 - B\|.$$

Ce qui donne le résultat demandé.

Partie V : une classe de similitude n'admet pas de point intérieur

Q18. Soit $B \in \mathcal{S}(A)$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
Par linéarité de la trace, $tr\left(B + \frac{1}{k}I_n\right) = tr\,(B) + \frac{n}{k}tr\,(I_n) \neq tr\,(B) = tr\,(A)$ donc $B + \frac{1}{k}I_n \notin \mathcal{S}(A)$.
Or $\lim\limits_{k\to+\infty} B + \frac{1}{k}I_n = B$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geqslant k_0, \left\|B + \frac{1}{k}I_n - B\right\|_\infty < \varepsilon$, ce qui entraîne que pour tout $\varepsilon > 0$, la boule ouverte de centre B et de rayon ε n'est pas contenue dans $\mathcal{S}(A)$. La matrice B n'est donc pas intérieure à $\mathcal{S}(A)$.
On a bien montré que $\boxed{\text{aucun point } B \text{ de } \mathcal{S}(A) \text{ n'est un point intérieur.}}$.

SOLUTION DU PROBLÈME 2

Q1. $\boxed{\text{Oui}}$ car la fonction nulle est clairement dans $\mathcal{E}$, et car pour tout $f, g \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \lambda(f+g(t))e^{-tx}$ $\boxed{\text{tend vers 0 en } +\infty \text{ comme combinaison linéaire de fonctions qui tendent vers 0,}}$ à savoir $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ et $t \mapsto g(t)e^{-tx}$.

Q2. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est continue par morceaux (car continue) sur $[0, +\infty[$.
En $+\infty$, comme $\frac{x}{2} > 0$ et $f \in \mathcal{E}$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-t\frac{x}{2}} = 0$,
Donc $\boxed{f(t)e^{-tx} = f(t)e^{-t\frac{x}{2}} \times e^{-t\frac{x}{2}} = o\left(e^{-t\frac{x}{2}}\right).}$ Or $t \mapsto e^{-t\frac{x}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Donc par $\boxed{\text{théorème de comparaison locale,}}$ on a $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ intégrable en $+\infty$. Ainsi on a $\boxed{J_f =]0, +\infty[.}$

Q3. Soit $a > 0$. On utilise le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée à paramètre réel}}$ avec $g(x,t) = f(t)e^{-tx}$, pour $x \in [a, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

- $\forall x \geqslant a,\ t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\forall t > 0,\ x \mapsto f(t)e^{-tx}$ converge vers 0 quand $x \to +\infty$.
- $\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall t > 0,\ |f(t)e^{-tx}| \leqslant |f(t)|e^{-ta}$.
  Le majorant ne dépend pas de x et est une fonction de t intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $a \in J_f$ (cf. **Q2.**).

Le théorème s'applique et donne que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}f(x) = 0.}$

Q4. On utilise le $\boxed{\text{théorème de dérivation } n \text{ fois d'une intégrale à paramètre, pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$ avec $g(x,t) = e^{-xt}f(t)$, sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ pour tout $a > 0$:

- Pour tout $x \geqslant a$, alors $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (cf. **Q2.**).
- Pour tout $t \geqslant 0$, $x \mapsto e^{-xt}f(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\alpha, +\infty[$ (ici $f(t)$ est une constante), et sa dérivée n-ième vaut : $x \mapsto (-t)^n e^{-xt}f(t)$.
- Pour tout $x \geqslant a$, et tout $t \geqslant 0$, on a :

$$\left|(-t)^n f(t)e^{-xt}\right| = t^n|f(t)|e^{-xt} \boxed{\leqslant t^n f(t)e^{-at} = \varphi_n(t),}$$

où φ_n ne dépend pas de x et est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
En $+\infty$, comme $f \in \mathcal{E}$ et $\frac{a}{3} > 0$, on a $f(t)e^{-\frac{a}{3}t} = o(1)$.
Par ailleurs, par croissances comparées, on a $t^n e^{-\frac{a}{3}t} = o(1)$.
Ainsi, par produit on obtient $\varphi_n(t) = o\left(e^{-\frac{a}{3}t}\right)$. Or $t \mapsto e^{-t\frac{a}{3}}$ est intégrable en $+\infty$.
Donc par théorème de comparaison locale, $\boxed{\varphi_n \text{ est intégrable en } +\infty.}$

Ainsi le théorème s'applique et donne que $\mathcal{L}f$ est $\mathcal{C}^n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\mathcal{L}f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, +\infty[}$ et que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0,\ (\mathcal{L}f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt}\,dt.}$$

Q5. Pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x\mathcal{L}f(x) &= \int_0^{+\infty} xf(t)e^{-xt}\,dt \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}\,du}_{=G(x)} \quad \text{par } \boxed{\text{changement de variable licite car affine } u = xt} \end{aligned}$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to0^+} G(x) = \ell$ par $\boxed{\text{th. de convergence dominée à paramètre réel}}$ avec $g(x,u) = f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}$ pour $x > 0$ et $u > 0$.

- Pour tout $x > 0$, la fonction $u \mapsto g(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ (car continue).
- Pour tout $u > 0$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} g(x,u) = \ell e^{-u}$ (limite d'une composée car f continue).
- la fonction $g : u \mapsto \ell e^{-u}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

- Comme f converge en $+\infty$ elle est bornée sur un voisinage $]M,+\infty[$ de $+\infty$.
  Et comme f est continue sur le segment $[0,M]$ est y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes.
  Ainsi $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+.}$ Soit K tel que $|f| \leqslant K$, alors on a :

$$\forall x>0,\ \forall u>0,\ |g(x,u)| \leqslant K\mathrm{e}^{-u},$$

  où le majorant qui ne dépend pas de x est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (résultat du cours).

Donc le théorème s'applique et donne : $\boxed{G(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_0^{+\infty} \ell \mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u = \ell.}$

Q6. Comme $\mathrm{e}^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, on a $f(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$.

Donc f est donc prolongeable par continuité en posant $\boxed{f(0)=0.}$
La fonction f prolongée est alors clairement continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, comme $\dfrac{t}{\mathrm{e}^t-1} - 1 \xrightarrow[t\to+\infty]{} -1$ et $\dfrac{t}{2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, on a : $\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{2}.}$

Par croissances comparées on en déduit que $\boxed{f \in \mathcal{E}.}$

Q7. Une $\boxed{\text{intégration par parties}}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \Big[\ -\tfrac{t}{a}\mathrm{e}^{-at}\ \Big]_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ \mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{a^2},}$$

où le crochet converge en $+\infty$ (vers 0) par croissances comparées.

Q8. On sait que : $\boxed{\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u^k \text{ si } |u|<1.}$ Donc pour $t>0$, comme $\mathrm{e}^{-t} \in [0,1[$, on a :

$$\mathrm{e}^{-xt} f(t) = t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{e}^{-t} \times \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \mathrm{e}^{-xt} + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{k=0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(x+k+1)t} + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-xt}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, avec la question précédente la linéarité de l'intégration donne :

$$\boxed{\mathcal{L}f(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-(x+k+1)t}\right)\ \mathrm{d}t.}$$

On veut maintenant intervertir somme et intégrale pour $x>0$ fixé.
Pour cela on applique le $\boxed{\text{théorème d'intégration terme à terme}}$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ avec la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} f_k$, où $f_k\ :\ t \mapsto t\mathrm{e}^{-(k+1+x)t}$.

- Chaque f_k est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (car continue);
- Par construction, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa somme est $t \mapsto \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{e}^{-xt}$ qui est aussi par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (car continue);
- Comme $|f_k| = f_k$ d'après la question précédente les f_k sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k| = \frac{1}{(k+1+x)^2}$.
  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} \geqslant 0$ est le terme général d'une série convergente – par théorème de comparaison, car la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Donc le théorème s'applique et le calcul d'intégrale de la question précédente donne :

$$\boxed{\forall x>0,\ Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x+1)^2}.}$$

C'est la formule voulue (il suffit de faire le décalage d'indice $n=k+1$).

Q9. On vient de voir que : $\forall x>0,\ Lf(x) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

On utilise le $\boxed{\text{théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions}}$ avec $h_n\ :\ x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2}$.

- Les h_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$.
- On a $\|h_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente.
  Ainsi la série $\sum h_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Donc la somme de la série $\sum h_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier, elle est continue en 0 d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}} \qquad \left[= \frac{\pi^2}{6}.\right]$$

Q10. Par $\boxed{\text{intégration par parties}}$ (impropre) en dérivant g ($g' = f$ par th. fondamental de l'analyse).
Le crochet vaut 0 en $t=0$ car $g(0)=0$ et converge vers 0 quanbd $t\to+\infty$ d'après l'hypothèse $f \in \mathcal{E}$

Q11. D'après la question précédente avec $x = k+1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1}\mathcal{L}f(k+2) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-(k+1)t}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} g(t)P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégration} \\
&= \int_0^1 g\big(-\ln(u)\big)P(u)\ \mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

par $\boxed{\text{changement de variable impropre } t = -\ln u \text{ licite}}$ car str. décroissant, $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

Q12. Il suffit de prouver que g converge en $+\infty$.

Cela revient à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \mathcal{L}f(1)$,

qui est $\boxed{\text{vrai d'après } \textbf{Q2.} \text{ puisque } 1 \in J_f =]0,+\infty[.}$

Q13. Comme $\mathcal{E}$ est un EV (cf. **Q1**) ainsi que $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, et que $f \mapsto \mathcal{L}f$ est clairement linéaire (par linéarité de l'intégration), $\boxed{\text{il suffit de montrer que } \mathcal{L}f = 0 \text{ entraîne } f=0.}$
D'après la question précédente, si $\mathcal{L}f = 0$, on a :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_0^1 g\big(-\ln(u)\big)P(u)\ \mathrm{d}u = 0.$$

Note φ le prolongement poar continuité de $u \mapsto g\big(-\ln(u)\big)$ sur $[0,1]$ (cf. question précédente)
D'après $(\star)$ on obtient donc que $\varphi = 0$.
Donc $g(t) = \varphi\big(\mathrm{e}^{-t}\big) = 0$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. Ainsi $g=0$; donc en dérivant g, $\boxed{f \text{ est nulle.}}$

Q14. Pour toute VA Y qui admet une variance, par $\boxed{\text{inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance,}}$ on a :

$$E\big(|Y-E(Y)|\big) = E\big(|Y-E(Y)| \times 1\big) \leqslant \sqrt{E\big(|Y-E(Y)|^2\big)}\sqrt{E(1^2)} = \sqrt{E\big((Y-E(Y))^2\big)} = \sqrt{V(Y)}.$$

Autre idée : par la formule de Koenig-Huyghens pour la variable $|Y-E(Y)|^2$, on a :

$$V(Y) = E\big((Y-E(Y))^2\big) = E\big(|Y-E(Y)|^2\big) = V\big(|Y-E(Y)|\big) + E\big(|Y-E(Y)|\big)^2 \geqslant E\big(|Y-E(Y)|\big)^2,$$

car tout variance est positive ou nulle. D'où le même résultat par croissance de la racine carrée. Comme nT suit la loi $\mathcal{B}(n,t)$, on a $E(nT) = nt$, donc $E(T) = t$ (linéarité de l'espérance).
De plus on a : $V(nT) = nt(1-t)$, soit $V(T) = \frac{t(1-t)}{n}$.
Donc l'inégalité ci dessus s'applique avec $Y = T$, soit :

$$\boxed{E\big(|T-t|\big) \leqslant \sqrt{V(T)} = \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.}$$

Q15. Comme $|\varphi(a)-\varphi(b)| \leqslant K|a-b|$ pour tout $a, b \in [0,1]$ puisque φ est lipschitzienne, d'après la question précédente, comme $\boxed{T \text{ est à valeurs dans } [0,1],}$ on a :

$$|\varphi(T)-\varphi(t)| \leqslant K\big|T-t\big|.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\big|B_n(t)-\varphi(t)\big| &= |E(\varphi(T)-\varphi(t))| \\
&\leqslant E(|\varphi(T)-\varphi(t)|) && \text{(inégalité triangulaire pour l'espérance)} \\
&\leqslant E(K|T-t|) && \text{croissance de l'espérance} \\
&= K \times E\big(|T-t|\big) && \text{linéarité de l'espérance} \\
&\leqslant K\sqrt{\frac{t(1-t)}{n}} && \textbf{Q14.} \\
&\leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto t(1-t)$ est maximale en $t=\frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Q16. Supposons que : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(u)\varphi(u)\ \mathrm{d}u = 0.$
Par théorème de transfert, on a par ailleurs :

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k}.$$

Donc $\boxed{B_n \text{ est une fonction polynomiale.}}$ Donc on peut remplacer P par B_n :

$$\forall n,\ \int_0^1 B_n(u)\varphi(u)\ \mathrm{d}u = 0.$$

Or, comme φ est bornée car continue (puisque lipschitzienne) sur un segment (th. des bornes atteintes), la question précédente donne :

$$\big|B_n(t)\varphi(u)-\varphi^2(t)\big| \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}|\varphi(t)| \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}\max_{[0,1]}|\varphi|.$$

Le majorant ne dépend pas de t et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (B_n)_n \text{ converge uniformément (CVU) vers } \varphi^2 \text{ sur } [0,1].}$
Donc le théorème d'intégration d'une suite de fonctions continues qui CVU donne :

$$0 = \int_0^1 B_n(u)\varphi(u)\ \mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi^2(u)\ \mathrm{d}u,$$

i.e. $\displaystyle\int_0^1 \varphi^2(u)\ \mathrm{d}u = 0$. Comme φ^2 est positive et continue, on ne déduit bien $\boxed{\varphi = 0}$ (th. de l'intégrale nulle).