

MATHÉMATIQUES

Devoir surveillé n°7 (en PC*) ou n°8 (en PSI) **SUJET BIS**

Durée 4h – Calculatrices interdites

Problème 1 :

Dans ce problème,

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- n est un entier supérieur ou égal à 2
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- La matrice identité d'ordre n est notée I_n
- $GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
- Si M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $sp(M)$ le spectre de M .

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle classe de similitude de A l'ensemble $\mathcal{S}(A)$ constitué de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à A :

$$\mathcal{S}(A) = \{P^{-1}AP, P \in GL_n(\mathbb{K})\}$$

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés topologiques de $\mathcal{S}(A)$.

Préliminaire :

Q1. Déterminer la classe de similitude d'une matrice scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I : Etude du caractère fermé de $\mathcal{S}(A)$ lorsque A est diagonalisable

On suppose dans cette partie que A est diagonalisable.

Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Q2.** Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que si $\lambda \in sp(A)$ alors $\lambda \in sp(B)$.
- Q3.** En déduire que si A admet n valeurs propres distinctes, alors $\mathcal{S}(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Q4.** On suppose que $n = 2$. Montrer que $\mathcal{S}(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- Q5.** Montrer que tout polynôme annulateur de A est aussi polynôme annulateur de B .
- Q6.** Soit p le nombre des valeurs propres de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs distinctes de propres de A de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.
- Justifier que B est diagonalisable et de même spectre que A .
 - Pour $i \in [[0, p-1]]$, exprimer $tr(B^i)$ à l'aide des valeurs propres de A .
 - En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

Partie II : matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la classe de similitude est bornée

On suppose dans cette partie que A est quelconque.

- Q7.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .
Montrer que si, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie.
- Q8.** On suppose dans cette question que A n'est pas une matrice scalaire.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A .
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle
- $$\text{la matrice de } u \text{ a pour première colonne } \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Q9.** Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la partie $\mathcal{S}(A)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit bornée.
- Q10.** Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invariante par similitude, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \|P^{-1}MP\| = \|M\|?$$

Partie III : Etude plus générale du caractère fermé de $\mathcal{S}(A)$

Cas $n=2$

On suppose dans cette sous-partie que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

- Q11.** On suppose dans cette question que A a une seule valeur propre λ dans $\mathbb{K}$ et que A n'est pas une matrice scalaire.
- a Montrer que A est semblable à toute matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{K}^*$.
- b En déduire que $\mathcal{S}(A)$ n'est pas fermée.
- Q12.** On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$
Donner une condition nécessaire et suffisante simple portant sur A pour que $\mathcal{S}(A)$ soit fermée

Cas $n=2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans cette sous-partie que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- Q13.** On suppose que le spectre réel de A est vide.
Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(A)$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
- a On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est A .
Montrer que $(e_1, u(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que la matrice de u dans cette base est :
- $$\begin{pmatrix} 0 & -\det(A) \\ 1 & \text{tr}(A) \end{pmatrix}$$
- b Justifier que A et B ont même polynôme caractéristique.
- c En déduire que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
- Q14.** En déduire une caractérisation des matrices A telles que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.

Cas n quelconque et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On suppose dans cette sous-partie que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- Q15.** Cette question se propose de montrer la réciproque de la question **Q6.** dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose dans cette question que $\mathcal{S}(A)$ est fermée.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A , et on considère une base $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. On notera $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cette matrice.
- a** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\mathcal{B}_k = (b_1, \frac{b_2}{k}, \dots, \frac{b_n}{k^{n-1}})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
Exprimer les coefficients de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_k$ fonction des coefficients de T .
- b** En déduire que A est diagonalisable.

Partie IV : Application

- Q16.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{F}$ une partie fermée non vide de E .
Soit $a \in \mathcal{F}$ et $u \in E$.
- a** Soit $r \geq 0$. On note $\mathcal{F}_r = \{x \in \mathcal{F}, \|x - a\| \leq r\}$
Montrer qu'il existe $x_r \in \mathcal{F}_r$ vérifiant : $\forall x \in \mathcal{F}_r, \|u - x\| \geq \|u - x_r\|$.
On pose $d_r = \|u - x_r\|$
- b** On pose $r = 2\|u - a\|$.
Montrer que $\forall x \in \mathcal{F}, \|u - x\| \geq d_r$.
(le réel d_r est appelé distance de u à $\mathcal{F}$).

- Q17.** **On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A est diagonalisable.**

Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}(A)$ telle que pour tout $C \in \mathcal{S}(A)$,

$$\text{tr} \left((M_0 - B) \times (M_0 - B)^T \right) \leq \text{tr} \left((M_0 - C) \times (M_0 - C)^T \right)$$

Partie IV : une classe de similitude n'admet pas de point intérieur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Q18.** Montrer qu'il n'existe pas de point intérieur à la partie $\mathcal{S}(A)$.

Transformée de LAPLACE

On note $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$) l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0, +\infty[$ (resp. de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $]0, +\infty[$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$, on note J_f l'ensemble des réel $x > 0$ tels que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On note enfin :

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R}) \mid \forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-tx} = 0 \right\}.$$

Ensemble de définition de la transformation de LAPLACE

- Q1.** L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$?
Q2. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors on a $J_f =]0, +\infty[$.

Quelques propriétés des transformées de LAPLACE

Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on définit la fonction $\mathcal{L}f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (transformée de LAPLACE) f , par :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt.$$

Dans cette partie on se donne $f \in \mathcal{E}$.

- Q3.** Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}f(x) = 0$.
Q4. Montrer que $\mathcal{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
 Exprimer alors ses dérivées successives sous forme d'intégrales.
Q5. Montrer que si $\lim_{+\infty} f = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), alors on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\mathcal{L}f(x) = \ell$.

Étude d'un exemple

Dans cette partie, on pose $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Q6.** Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu. Pourquoi a-t-on $f \in \mathcal{E}$?
Q7. Pour tout $a > 0$ montrer la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} te^{-at} dt$.
Q8. En déduire que pour tout $x > 0$, on a $\mathcal{L}f(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.
Q9. Étudier la convergence de $\mathcal{L}f(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0^+ .

Injectivité de la transformation de LAPLACE

Dans cette partie on admet le résultat suivant qui sera étudié dans la partie suivante.

Si $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors : $\left(\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 \varphi(u)P(u) \, du = 0 \right) \implies \varphi = 0$ $(\star)$

D'après **Q2.** et **Q4.** on peut définir l'application suivante (transformation de LAPLACE) :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathcal{L}f \end{array} .$$

On veut démontrer l'injectivité cette application $\mathcal{L}$.

Pour $f \in \mathcal{E}$ donnée on définit la fonction g sur $]0, +\infty[$ par : $g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s} \, ds$.

Q10. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} \, dt = \frac{1}{x} \mathcal{L}f(x+1)$.

Q11. En déduire que pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ (avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$),

$$\text{alors on a : } \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1} \mathcal{L}f(k+2) = \int_0^1 g(-\ln(u))P(u) \, du.$$

Q12. Montrer que la fonction $u \mapsto g(-\ln(u))$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$.

Q13. Dédurre des questions précédentes que l'application $\mathcal{L}$ est injective.

Une preuve partielle de $(\star)$ par les polynômes de BERNSTEIN

Soit $K \geq 0$. Soit $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction K -lipschitzienne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, 1]$, soit T une variable aléatoire telle que nT suit la loi binomiale de paramètres n et t . On note alors : $B_n(t) = E(\varphi(T))$.

Q14. Montrer que : $E(|T - t|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

Q15. En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $|B_n(t) - \varphi(t)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$.

Q16. En déduire l'implication $(\star)$ dans le cas où φ est lipschitzienne.

FIN du DEVOIR