

Gros théorèmes sur les endomorphismes et matrices diagonalisables et trigonalisables

Proposition 1 Pour l'endomorphisme f , les cinq assertions suivantes sont équivalentes:

1. il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
2. il existe une base E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
3. L'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces propres de f (soit $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(f)} E_{\lambda}(f)$).
4. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f vaut n (soit $\sum_{\lambda \in sp(f)} \dim E_{\lambda}(f) = \sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(\ker(f - \lambda id)) = \dim(E)$).
5. $\sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(\ker(f - \lambda id)) \geq \dim(E)$.

Proposition 2 Si χ_M est scindé alors

$\det(M)$ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité

$\text{tr}(M)$ est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité

Proposition 3 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Pour toute valeur propre λ de M on a $\dim(E_{\lambda}(M)) \leq m(\lambda)$,
2. Si M admet une valeur propre λ vérifiant $\dim(E_{\lambda}(M)) < m(\lambda)$, alors M n'est pas diagonalisable.
3. La matrice M est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique de M est scindé et pour toute valeur propre λ de M on a l'égalité $\dim(E_{\lambda}(M)) = m(\lambda)$.

Proposition 4 Si P est un polynôme annulateur de u alors le spectre de u est contenu dans l'ensemble des racines de P .

Théorème 5 (caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs)

1. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si le polynôme scindé à racines simples $\prod_{\lambda \in sp(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .
2. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples.

Théorème 6 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Théorème 7 (Théorème spectral) Soit u un endomorphisme de E . L'endomorphisme u est symétrique si et seulement si il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u . (on dit que u est diagonalisable en base orthonormée).

Corollaire 8 Soit u un endomorphisme symétrique de E . On a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} E_{\lambda}(u) \text{ et } E_{\lambda}(u) \perp E_{\mu}(u) \text{ si } \lambda \neq \mu.$$

Corollaire 9 Soit S une matrice symétrique réelle de taille n .

1. Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour le produit scalaire usuel formée de vecteurs propres de S .
2. Il existe une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP = (P^T)SP$ soit diagonale.