

TD fonctions de plusieurs variables

vendredi 27 et 28 mars

Exercice 1 Recherche de certaines solutions d'une équation aux dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 .

On dit que f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - 2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0$.

On pose $g(x, t) = e^t f(x, t)$.

1. Justifier que g est de classe C^2 .

Montrer que f vérifie $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t) - g(x, t) : (\mathcal{E}')$

2. On pose $x(u, v) = \frac{u+v}{2}$ et $t(u, v) = \frac{u-v}{2}$.

(a) Justifier que $\varphi : (u, v) \mapsto (x(u, v), t(u, v))$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et préciser φ^{-1} .
On pose $G = g \circ \varphi$.

(b) Montrer que g vérifie $(\mathcal{E}')$ si et seulement si $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ $\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = -\frac{1}{4}G(u, v) : (\mathcal{E}'')$.

(c) Soit α et β deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 strictement monotones qui ne s'annulent pas.
On suppose que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ $G(u, v) = \alpha(u) \times \beta(v)$.

i. Montrer que si G vérifie $(\mathcal{E}'')$, alors la fonction $\frac{\alpha'}{\alpha}$ est une fonction constante non nulle.

ii. En déduire qu'il existe un réel non nul k et un réel A tel que $G(u, v) = Ae^{ku}e^{-\frac{v}{4k}}$. Donner une expression de la fonction f dans ce cas (G étant définie à partir de f comme indiqué précédemment dans l'énoncé).

Exercice 2 Formule de Fubini:

Soit a, b, c, d des réels vérifiant $a < b$ et $c < d$ et $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

On souhaite montrer que $\int_a^b \left(\int_c^d f(u, v) dv \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, v) du \right) dv$.

Pour $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, on pose $F(x, y) = \int_a^x \left(\int_c^y f(u, v) dv \right) du$ et $G(x, y) = \int_c^y \left(\int_a^x f(u, v) du \right) dv$.

1. Etude de $\frac{\partial F}{\partial x}$.

(a) Soit $y \in [c, d]$. Justifier que $u \mapsto \int_c^y f(u, v) dv$ est définie et continue sur $[a, b]$.
En déduire que F est définie sur $[a, b] \times [c, d]$.

(b) En déduire que F admet une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x}$ et
donner une expression de $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ à l'aide de f pour $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

2. Etude de $\frac{\partial G}{\partial x}$

(a) Justifier que la fonction $h : (x, v) \mapsto \int_a^x f(u, v) du$ est définie sur $[a, b] \times [c, d]$.

(b) Soit $x \in [a, b]$. Montrer que $v \mapsto h(x, v)$ est continue sur $[c, d]$.

(c) Soit $v \in [c, d]$. Montrer que $x \mapsto h(x, v)$ est de classe C^1 sur $[a, b]$.

(d) En déduire que G admet une dérivée partielle $\frac{\partial G}{\partial x}$ et
donner une expression de $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ à l'aide de f pour $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$.

3. En déduire que $F = G$.

Exercice 3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^p$ et muni de son produit scalaire usuel.

1. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(X) = X^T \times M \times X + f(X)$.

(a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^p$, $\|X\| > r \Rightarrow g(X) \geq g(0_{\mathbb{R}^p})$.

(b) En déduire qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^p$, $g(X) \geq g(X_0)$.

2. Soit $C \in \mathbb{R}^p$. On pose, pour $X \in \mathbb{R}^p$, $f(X) = C^T \times X$ et $g(X) = X^T \times M \times X + f(X)$.

(a) Justifier que f est lipschitzienne.

(b) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$ et calculer $\nabla g(X)$. (indication: $\nabla g(X) = 2MX + C$).

(c) En déduire que la fonction g admet un unique point critique X_0 et justifier que g admet un minimum atteint en X_0 .

(d) Retrouver le résultat précédent en simplifiant $g(X_0 + H) - g(X_0)$ pour $H \in \mathbb{R}^p$.

3. Application à la méthode des moindres carrés.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille finie $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $\mathbb{R}^2$. On pose $M_i = (\alpha_i, \beta_i)$. On suppose qu'il existe (i, j) tel que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Si D est la droite d'équation $y = ax + b$, on note H_i le point de D d'abscisse α_i . Le but de l'exercice est de trouver un couple $X = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $g(X) = \sum_{i=1}^n d(M_i H_i)^2$ est minimal.

On note $\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et $\bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$, $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2$ et $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta})$ (variance et covariance empiriques).

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(a) Déterminer des réels $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ tels que $g(a, b) = \gamma_1 a^2 + \gamma_2 ab + \gamma_3 b^2 + \gamma_4 a + \gamma_5 b + \gamma_6$

Déterminer $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $g(X) = X^T M X + C^T X + \gamma_6$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 & -\sum_{i=1}^n \alpha_i \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i & n \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

(c) Conclure.

Solution de l'exercice 1:

1. La fonction g est C^2 (opérations) et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \text{ donc } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = e^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, t) = e^t f(x, t) + e^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \text{ donc } \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t) = e^t f(x, t) + e^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + e^t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + e^t \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t).$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t) + g(x, t) = e^t \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \left(f(x, t) + 2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \right) + f(x, t) \right)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t) + g(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - 2 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0 : (\mathcal{E}).$$

2. On a $x(u, v) = \frac{u+v}{2}$ et $t(u, v) = \frac{u-v}{2}$.

a Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. $(x, t) = \varphi(u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ t = \frac{u-v}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x+t \\ v = x-t \end{cases}$ donc (x, t) admet un unique antécédent par φ qui donc est bijective et $\varphi^{-1}(x, t) = (x+t, x-t)$.

b On a $G(u, v) = g(x(u, v), t(u, v))$ donc par la règle de la chaîne,

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g(x(u, v), t(u, v))}{\partial x} + \frac{\partial g(x(u, v), t(u, v))}{\partial t} \right) \text{ donc par la règle de la chaîne,}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial G}{\partial u} \right)}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) \text{ donc } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x, t) + g(x, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(u, v) = -\frac{1}{4} G(u, v).$$

c On pose $G(u, v) = \alpha(u) \times \beta(v)$.

$$\text{On a donc } \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = \alpha'(u) \times \beta(v) \text{ donc } \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u}(u, v) = \frac{\partial \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) \right)}{\partial v} = \alpha'(u) \times \beta'(v)$$

$$\text{Si } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} = -\frac{1}{4} G(u, v) \text{ alors } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \alpha'(u) \times \beta'(v) = -\frac{1}{4} \alpha(u) \times \beta(v).$$

Or

$$\text{donc } \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)} = -\frac{\beta'(v)}{4\beta(v)}. \text{ On en déduit que } -\frac{\beta'(v)}{4\beta(v)} \text{ est indépendant de } v.$$

$$\text{Posons } k = -\frac{\beta'(v)}{4\beta(v)}. \text{ On a } \forall u \in \mathbb{R}, \alpha'(u) = k\alpha(u).$$

Il existe donc un réel A_1 tel que $\alpha(u) = A_1 e^{ku}$.

De même $\forall v \in \mathbb{R}, \beta'(v) = \frac{-1}{4k} \beta(v)$ donc Il existe donc un réel A_2 tel que $\beta(v) = A_2 e^{-\frac{v}{4k}}$.

On en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, G(u, v) = A e^{ku} e^{-\frac{v}{4k}}$.

On a $G(u, v) = A e^{ku} e^{-\frac{v}{4k}}$.

Or $g = G \circ \varphi^{-1}$ donc $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, g(x, t) = G(x+t, x-t) = A e^{k(x+t)} e^{-\frac{x-t}{4k}}$ et donc

$$g(x, t) = A e^{k(x+t)} e^{-\frac{x-t}{4k}} = A e^{(k-\frac{1}{4k})x + (k+\frac{1}{4k})t} \text{ donc } f(x, t) = A e^{(k-\frac{1}{4k})x + (k+\frac{1}{4k})t} \times e^{-t}.$$

Comme on a raisonné par implication, on vérifie qu'une telle fonction est solution de l'équation.

Remarque Comme on a posé une forme a priori pour la fonction G en l'écrivant comme produit de fonctions ne dépendant que d'une variable, on peut seulement dire qu'on a trouvé des solutions mais pas qu'on a résolu l'équation.

Solution de l'exercice 2:

1. Etude de $\frac{\partial F}{\partial x}$.

(a) Soit $u \in [a, b]$. $\varphi_u : v \mapsto f(u, v)$ est continue sur $[c, d]$ donc sur $[c, y]$ donc $\int_c^y \varphi_u(v) dv$ existe.

$$\text{Posons } k(u, y) = \int_c^y \varphi_u(v) dv = \int_c^y f(u, v) dv.$$

$$\text{Soit } (x, y) \in [a, b] \times [c, d].$$

Pour montrer que $F(x, y) = \int_a^x k(u, y) du$ existe, montrons que la fonction $u \mapsto k(u, y)$ continue sur $[a, b]$ (qui entraîne la continuité sur $[a, x]$) ce qui revient à montrer que $u \mapsto \int_c^y f(u, v) dv$ est continue.

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique sur $[c, y]$ (domination par une constante en appliquant le th des bornes atteintes à f sur $[a, b] \times [c, d]$).

- (b) Soit $y \in [c, d]$. La fonction $x \mapsto \int_a^x k(u, y) du = F(x, y)$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto k(u, y)$ donc elle est de classe C^1 et de dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = k(x, y) = \int_c^y f(x, v) dv$.

2. Etude de $\frac{\partial G}{\partial x}$.

- (a) Soit $(x, v) \in [a, b] \times [c, d]$.
On a $u \mapsto f(u, v)$ est continue sur $[a, b]$ donc sur $[a, x]$ car f est continue donc $h(x, v) = \int_a^x f(u, v) du$ existe.
- (b) Soit $x \in [a, b]$.
le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre avec $(u, v) \mapsto f(u, v)$ et $I = [0, x]$ s'applique (domination par une constante en vertu du th des bornes atteintes).
On a donc $v \mapsto h(x, v) = \int_a^x f(u, v) du$ est continue sur $[c, d]$.
- (c) Soit $v \in [c, d]$. La fonction $x \mapsto h(x, v) = \int_a^x f(u, v) du$ est une primitive de la fonction continue $x \mapsto f(x, v)$ donc est de classe C^1 sur $[a, b]$ et de dérivée $\frac{\partial h}{\partial x}(x, v) = f(x, v)$.
- (d) On a $G(x, y) = \int_c^y (\int_a^x f(u, v) du) dv = \int_c^y h(x, v) dv$.
Fixons $y \in [c, d]$ et appliquons le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur $[c, y]$:
(H'_2) : $\frac{\partial h}{\partial x}(x, v)$ existe et vaut $f(x, v)$.
(H'_5) : On peut toujours majorer $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, v) \right|$ par une constante.

On en déduit que $x \mapsto \int_c^y h(x, v) dv$ est de classe C^1 et de dérivée $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \int_c^y \frac{\partial h(x, v)}{\partial x} dv = \int_c^y f(x, v) dv$.

3. La fonction $H = G - F$ est définie sur $[a, b] \times [c, d]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

On en déduit qu'il existe une fonction $w : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d], H(x, y) = w(y)$.

Or $G(0, y) = 0$ et $F(0, y) = 0$ donc $H(0, y) = w(y) = 0$ donc $F = G$. On a donc $F(c, d) = G(c, d)$ (formule de Fubini)

Solution de l'exercice 3:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}^p$ et muni de son produit scalaire usuel.

1. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne et $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(X) = X^T \times M \times X + f(X)$.

- (a) On a vu $X^T \times M \times X \geq C \|X\|^2$ avec $C = \min_{\lambda \in \text{sp}(M)} > 0$ (cours sur la hessienne).
On en déduit que $g(X) \geq C \|X\|^2 + f(X)$ et $|f(X) - f(0)| \leq k \|X - 0\|$ donc $f(X) \geq f(0) - k \|X\|$ donc $g(X) - g(0) \geq C \|X\|^2 - k \|X\|$ car $g(0) = f(0)$.
 $C \|X\|^2 - k \|X\| = \|X\| (C \|X\| - k) \geq 0$ si $\|X\| > \frac{k}{C}$ et on a bien $g(X) \geq g(0_{\mathbb{R}^p})$.
- (b) On applique le théorème des bornes atteintes sur le fermé borné $B = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \|X\| \leq r\}$
à la fonction continue g . il existe $X_0 \in B$ vérifiant $\forall X \in B, g(X) \geq g(X_0)$.
On a donc $g(X_0) \geq g(0)$ car $0 \in B$ donc en utilisant la question précédente, $\forall X \in \mathbb{R}^p, g(X) \geq g(X_0)$.

2. Soit $C \in \mathbb{R}^p$. On pose, pour $X \in \mathbb{R}^p$, $f(X) = C^T \times X$ et $g(X) = X^T \times M \times X + f(X)$.

(a) La fonction f est linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ donc est lipschitzienne.

(b) Posons $u(X) = X^T \times M \times X = \sum_{(i,j) \in [[1,p]]^2} m_{i,j} x_i x_j$

Soit $i \in [[1, p]]$. On a $u(X) = m_{i,i} x_i^2 + \sum_{j \in [[1, p]] \setminus \{i\}} (m_{i,j} + m_{j,i}) x_i x_j + C = m_{i,i} x_i^2 + \left(2 \sum_{j \in [[1, p]] \setminus \{i\}} m_{i,j} x_j \right) x_i + C$ avec C indépendant de x_i car M est symétrique.

On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(X) = 2m_{i,i} x_i + 2 \sum_{j \in [[1, p]] \setminus \{i\}} m_{i,j} x_j = 2L_i(M) X$ qui est une fonction linéaire donc continue.

On a donc $\nabla u(X) = 2 \begin{pmatrix} L_1(M) X \\ \vdots \\ L_p(M) X \end{pmatrix} = 2MX$.

Posons $v(X) = C^T X$. Si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ alors $C^T X = \sum_{i=0}^p c_i x_i$. On en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_i}(X) = c_i$ (fonction constante donc

continue) donc $\nabla v(X) = C$.

Les fonctions u et v sont C^1 donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$ et calculer $\nabla g(X) = 2MX + C$.

(c) On a $\nabla g(X) = 0 \Leftrightarrow MX = -\frac{1}{2}C$ et $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ donc $0 \notin \text{sp}(M)$ donc M est inversible donc $\nabla g(X) = 0 \Leftrightarrow X = -\frac{1}{2}M^{-1}C$. On pose $X_1 = -\frac{1}{2}M^{-1}C$.

On a $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 2 \sum_{j=0}^p m_{i,j} x_j$ donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = 2m_{i,j}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} = 0$. Les fonctions u et v sont donc de classe C^2 et g est donc de classe C^2 et $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = 2m_{i,j}$. On a donc $H_g(X_1) = 2M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$. On en déduit g admet un minimum locale en X_1 .

La question 1 entraîne l'existence d'un minimum global atteint en un point X_0 .

Or $\mathbb{R}^p$ est ouvert et g est de classe C^1 donc X_0 est un point critique donc $X_0 = X_1$ et le minimum en $X_0 = X_1$ est global.

(d) Posons $\Delta = g(X_0 + H) - g(X_0)$ pour $H \in \mathbb{R}^p$.

$$\Delta = (X_0 + H)^T M (X_0 + H) + C^T (X_0 + H) - (X_0)^T M X_0 + C^T X_0$$

On a $\Delta = H^T M X_0 + X_0^T M H + H^T M H + C^T H = 2H^T M X_0 + H^T M H + C^T H$ car $(X_0^T M H) = (X_0^T M H)^T = H^T M^T X_0 = H^T M X_0$.

Or $2H^T M X_0 = 2H^T M M^{-1}(-\frac{1}{2})C = -H^T C = -(C^T H)$ (transposition d'un réel).

On en déduit que $\Delta = H^T M H > 0$ si $H \neq 0$ car $M \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

3. Application à la méthode des moindres carrés.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille finie $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ de points de $\mathbb{R}^2$. On pose $M_i = (\alpha_i, \beta_i)$. On suppose qu'il existe (i, j) tel que $\alpha_i \neq \alpha_j$. Si D est la droite d'équation $y = ax + b$, on note H_i le point de D d'abscisse H_i . Le but de l'exercice est de trouver un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $g(a, b) = \sum_{i=1}^n M_i H_i^2$ est minimal.

On note $\bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et $\bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$, $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2$ et $c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})(\beta_i - \bar{\beta})$ (variance et covariance empiriques).

On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

4. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(a) On a $d(M_i H_i)^2 = (\alpha_i - \alpha_i)^2 + (a\alpha_i + b - \beta_i)^2$ donc $g(a, b) = \sum_{i=1}^n (a\alpha_i + b - \beta_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) a^2 + \left(2 \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) ab + nb^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i\right) a - 2 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right) b + \sum_{i=1}^n \beta_i^2$.

Avec $M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 & -\sum_{i=1}^n \alpha_i \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i & n \end{pmatrix}$, on a $(a \ b) \times M \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) a^2 + \left(2 \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) ab + nb^2$

En prenant $C = -2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \sum_{i=1}^n \beta_i\right)$, on a $C^T X = -2 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i\right) a - 2 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i\right) b + \sum_{i=1}^n \beta_i^2$ donc $g(X) = X^T M X + C^T X + \sum_{i=1}^n \beta_i^2$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 & -\sum_{i=1}^n \alpha_i \\ -\sum_{i=1}^n \alpha_i & n \end{pmatrix}$. On a $\det(M) > 0$ donc les deux valeurs propres λ et μ sont de même signe. On a $\text{tr}(M) > 0$ donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ donc $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(c) Conclure en appliquant la question 2.