

Gros théorèmes d'analyse

I Théorèmes d'interversion pour les suites de fonctions

Les fonctions sont définies sur un intervalle et à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1 Théorème de continuité de la limite

Théorème 1 *Soit $x_0 \in I$. Si chaque fonction f_n est continue en x_0 et la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f alors f est continue en x_0 .*

Corollaire 2 (théorème de continuité de la limite) *Si chaque fonction f_n est continue sur I et la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f alors f est continue sur I .*

I.2 Théorème de la double limite (ou d'interversion des limites)

Théorème 3 (théorème de la double limite) *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $I = [a, b[$ et si pour tout n , la fonction f_n admet une limite réelle ou complexe l_n en b alors la suite (l_n) converge, la fonction f admet une limite réelle ou complexe l en b et $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (l_n)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow b} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow b} f_n(x) \right)$.*

I.3 interversion limite intégrale sur un intervalle quelconque I

Théorème 4 (convergence dominée) *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

(H1) : chaque f_n est continue par morceaux et la fonction f est continue par morceaux

(H2) : la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I .

(H3) : (hypothèse de domination) Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout n , $|f_n| \leq \varphi$ (c'est-à-dire $\forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$)

alors

(C1) : les fonctions f_n et f sont intégrables

(C2) : $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ soit

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(t)) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt$$

I.4 Dérivabilité de la limite

Théorème 5 (théorème de dérivabilité de la limite)

Si

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I .

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

- La suite de fonctions (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction g

alors

la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

I.5 Généralisation aux dérivées successives du théorème de dérivation de la limite

Théorème 6 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est de classe C^k et que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f . Si pour tout $i \in [1, k-1]$ la suite de fonctions $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et si la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, alors la fonction f est de classe C^k sur I et pour tout $i \in [1, k]$, la suite $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers $(f^{(i)})$.

II Théorèmes d'interversion pour les séries de fonctions

Les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Continuité de la somme

Théorème 7 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur I alors la somme de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction continue sur I . Théorème d'interversion de la double limite (version séries de fonctions)

II.2 Théorème de la double limite

Théorème 8 (admis) $I = [a, b[$ avec b éventuellement $+\infty$.

Si chaque fonction u_n admet une limite $l_n \in \mathbb{K}$ en b et si la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément et est de somme S alors

- la série numérique $\sum l_n$ converge vers un scalaire σ
- la fonction S admet une limite $l \in \mathbb{K}$ en b
- $l = \sigma$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow b} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow b} u_n(x) \right)$.

II.3 Interversion série intégrale sur un segment

Théorème 9 On suppose que $I = [a, b]$ et

(H₁) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est continue sur I ,

(H₂) : la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

alors

(C₁) : la série numérique $\sum \left(\int_a^b u_n(t) dt \right)$ converge

(C₂) : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t) dt \right)$.

II.4 Théorème d'interversion série-intégrale sur un intervalle quelconque I

Théorème 10 (admis) Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et S une fonction de I dans $\mathbb{K}$. On suppose que

(H1) : chaque u_n est continue par morceaux et intégrable sur I

(H2) : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I

(H3) : La série numérique $\sum \int_I |u_n|$ converge

alors

(C1) : la fonction S est intégrable sur I , la série numérique $\sum \int_I u_n$ converge

(C2) : $\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n \right)$ c'est-à-dire $\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t) dt \right)$ soit

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(t) dt \right)$$

II.5 Dérivation terme à terme

Théorème 11 On suppose que

(H1) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe C^1 ,

(H2) : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I ,

(H3) : la série de fonctions $\sum u'_n$ converge uniformément sur I ,

alors

(C1) : la somme de la série S de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe C^1 ,

(C2) : $\forall x \in I, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

II.6 Extension du théorème de dérivabilité de la somme

Théorème 12 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

(H1) : pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est de classe C^k ,

(H2) : pour tout $i \in [0, k-1]$ la série de fonctions $\sum u_n^{(i)}$ converge simplement sur I ,

(H3) la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur I ,

alors

(C1) : la somme S de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une fonction de classe C^k ,

(C2) : $\forall i \in [0, k], \forall x \in I, S^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}(x)$.

III Théorème de continuité, théorème de dérivation sous le signe $\int$

III.1 Théorème de continuité

Théorème 13 Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, I un intervalle et f une fonction: $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$.

On pose, pour $x \in A$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$. ($I = [a, b],]a, b[,]a, b]$ ou $[a, b[$ avec a et b éventuellement $\pm\infty$).

Si les hypothèses suivantes sont réalisées:

(H1): pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est **continue par morceaux** sur I .

(H2): pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est **continue** sur A .

(H3) (hypothèse de domination): Il existe une fonction φ **continue par morceaux et intégrable** sur I telle que

$$\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t) : (\text{majoration indépendante de } x).$$

alors

(C1): la fonction F est **définie et continue** sur A .

III.2 Théorème de dérivation sous le signe $\int$

Théorème 14 (Formule de Leibniz)

Soit A un intervalle, I un intervalle et f une fonction: $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$.

On pose, pour $x \in A$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ ($I = [a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ avec a et b éventuellement $\pm\infty$).

Si les hypothèses suivantes sont réalisées:

(H'_1): pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est **continue par morceaux et intégrable** sur I .

(H'_2): la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ en tout $(x, t) \in A \times I$

(H'_3): pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est **continue par morceaux** sur I .

(H'_4): pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est **continue** sur A .

(H'_5): (hypothèse de domination):

Il existe une fonction φ **continue par morceaux et intégrable** sur I telle que

$$\forall x \in A, \forall t \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

alors

(C_1): la fonction F est **définie et de classe C^1** sur A .

(C_2): $\forall x \in A$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ (formule de dérivation sous le signe $\int$)

III.3 Intégrales dépendant d'un paramètre de classe C^k

Théorème 15 Soit A un intervalle, I un intervalle et f une fonction: $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$.

On pose, pour $x \in A$, $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ ($I = [a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b[$ avec a et b éventuellement $\pm\infty$).

Si les hypothèses suivantes sont réalisées:

(H''_1): pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est **continue par morceaux et intégrable** sur I .

(H''_2): la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable jusqu'à l'ordre k

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ en tout $(x, t) \in A \times I$

(H''_3): pour tout $i \in [1, k-1]$, pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est **continue par morceaux et intégrable** sur I .

(H''_4): pour tout $i \in [1, k]$, pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$ est **continue** sur A .

(H''_5): (hypothèse de domination de la dernière dérivée partielle): Il existe une fonction φ **continue par morceaux et intégrable** sur I telle que $\forall x \in A, \forall t \in I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

alors

(C_1): la fonction F est **définie et de classe C^k** sur A .

(C_2): $\forall i \in [1, k]$, $\forall x \in A$, $F^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$ (formule de dérivation sous le signe $\int$).