

Révisions d'algèbre linéaire (1) CORRECTION

Exercice 1 Voir cours

Exercice 2 Voir cours

Exercice 3 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\det(A) \geq 0$.

Solution de l'exercice:

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de A (répétées avec multiplicité)

Comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, si μ est une valeur propre complexe non réelle de A , alors $\bar{\mu}$ est une valeur propre complexe de A de même multiplicité que μ .

Considérons les valeurs propres complexes non réelles de A (répétées avec multiplicité): $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_r, \bar{\mu}_r$ (c'est possible car $\mu \in sp(A)$ avec multiplicité $m \Leftrightarrow \bar{\mu} \in sp(A)$ avec multiplicité m)

On a χ_A scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\det(A) = \prod_{i=1}^k \lambda_i \prod_{j=1}^r \mu_j \times \bar{\mu}_j \geq 0$ car $\mu_j \times \bar{\mu}_j = |\mu_j|^2 \geq 0$.

Exercice 4 On pose $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .

2. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix} = D$.

3. Déterminer 9 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 = A$.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que $M^3 = A$. et on pose $M' = P^{-1}MP$.

(a) Montrer que $M'D = DM'$. En déduire que M' est diagonale.

(b) Que peut-on en déduire?

Solution de l'exercice:

1. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+4 & -4 & 4 \\ 4 & x-4 & -4 \\ 8 & -8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+8 & -4 & 4 \\ 0 & x-4 & -4 \\ x+8 & -8 & x \end{vmatrix} = (x+8) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & x+4 & -4 \\ 1 & -8 & x \end{vmatrix} = (x+8) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & x-4 & -4 \\ 0 & -4 & x-4 \end{vmatrix}$
donc $\chi_A(x) = x(x-8)(x+8)$.

2. On trouve $E_0(A) = \text{vect}(U_1)$, $E_8(A) = \text{vect}(U_2)$ et $E_{-8}(A) = \text{vect}(U_3)$ avec

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{donc si } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix} = D$$

3. Posons $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_i \in \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$. On a $(2\varepsilon_i)^3 = 8$ donc $(\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^3 = D$.

Posons $M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = P \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} P^{-1}$. On a $(M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^3 = (P \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} P^{-1})^3 = P (\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2})^3 P^{-1} = P D P^{-1} = A$.

Il y a 3 possibilités pour ε_1 et 3 donc 9 possibilités pour $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ donc pour $M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$

4. Réciproquement

Si $M^3 = A$ alors $MA = M^4 = AM$

$$MA = AM \Leftrightarrow P^{-1}MAP = P^{-1}AMP \Leftrightarrow (P^{-1}MP)(P^{-1}AP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}MP) \Leftrightarrow M'D = DM'.$$

$$\text{Si } M' = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & -0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8d & -8g \\ 0 & 8e & -8h \\ 0 & 8f & -8i \end{pmatrix} \text{ alors } DM' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8b & 8e & 8h \\ -8c & -8f & -8i \end{pmatrix} \text{ et } M'D = \begin{pmatrix} 0 & 8d & -8g \\ 0 & 8e & -8h \\ 0 & 8f & -8i \end{pmatrix}.$$

donc $M'D = DM' \Leftrightarrow d = g = b = c = 0$ et $8f = -8f$ et $8i = -8i \Leftrightarrow M'$ diagonale.

Or $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^3 \end{pmatrix}$ et $\beta^3 = 8 \Leftrightarrow \beta^3 = 2^3 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \in \mathbb{U}_3$. (idem pour γ) donc M' est une des matrice $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ de la question précédente.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. et $B \in GL_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si X est vecteur propre de AB alors BX est vecteur propre de BA .
2. Montrer que si AB est diagonalisable, alors BA est diagonalisable.

Solution de l'exercice:

1. Soit $\lambda \in sp(AB)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.
On a $ABX = \lambda X$. donc $(BA)BX = B(\lambda X) = \lambda BX$ donc $(BA)BX = \lambda(BX)$.
Or B est inversible donc $BX \neq 0$ donc BX est vecteur propre associé à BA .
2. AB est diagonalisable. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteur propres de AB .
Or $\phi: X \mapsto BX$ est un isomorphisme donc La famille $(BX_1, \dots, BX_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée d'après a de vecteurs propres de BA donc BA est diagonalisable.

Exercice 6 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|a| \neq |b|$ et $n \geq 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & a & b \\ b & a & \cdots & b & a \end{pmatrix}_{2n}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Diagonaliser A .

Solution de l'exercice:

1. A est symétrique réelle donc diagonalisable

2. • (C_1, C_2) libre car $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2 \neq 0$ et

$C_{2k+1} = C_1$ et $C_{2k+2} = C_2$ donc $rg(A) = 2$. donc $\dim(\ker(A)) = 2n - 2$.

Soit f canoniquement associée à A et $(e_1, \dots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

$C_{2k+1} = C_1$ donc $f(e_{2k+1} - e_1) = 0$

$C_{2k+2} = C_2$ donc $f(e_{2k+2} - e_2) = 0$

donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $2n - 2$ vecteurs échelonnés de $\ker(A)$ donc libre donc

base de $\ker(A) = E_0(A)$.

• $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n(a+b) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 = n(a+b) \neq 0$ car $|a| \neq |b|$

• Avec la trace, la dernière valeur propre est $\lambda_2 = n(a-b) \neq 0$.

En examinant la ligne 1 et $2k+1$ du système $AX = \lambda_2 X$, on obtient $x_1 = x_{2k+1}$

En examinant la ligne 2 et $2k+2$ du système $AX = \lambda_2 X$, on obtient $x_2 = x_{2k+2}$.

En injectant dans la première ligne, on obtient $x_2 = -x_1$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à λ_2 .

Comme $\dim(E_0(A)) = 2n - 2$, on a $\dim(E_{\lambda_1}(A)) = \dim(E_{\lambda_2}(A)) = 1$.

On en déduit une base de vecteurs propres et une matrice P qui diagonalise A .

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i \in [[1, n]]$, $a_{i,i} \geq 0$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie convexe fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice:

1. fait en exercice de cours: utiliser $a_{i,i} = (f(e_i)|e_i)$ avec f canoniquement associé à A et $(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Convexité: Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$.
 - $(tA + (1-t)B)^T = tA^T + (1-t)B^T = tA + (1-t)B$ donc $tA + (1-t)B$ est symétrique.
 - si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $X^T(tA + (1-t)B)X = tX^TAX^T + (1-t)X^TBX \geq 0$ car $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$ donc $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$.

On en déduit que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Caractère fermé: Soit (A_p) une suite $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers A .

• $(A_p)^T = A_p : (R)$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p^T = A^T$ car $M \mapsto M^T$ est linéaire dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc, en passant à la limite dans (R) on a $A^T = A$ donc A est symétrique.

• si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $X^T A_p X \geq 0 : (R')$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} X^T A_p X^T = X^T A X$ continuité du produit matriciel donc en passant à la

limite dans (R') on a $X^T A X \geq 0$

On en déduit que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.

On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel.

1. Montrer que $\ker(A^T + A) = \ker(A) \cap \ker(A^T)$.
2. Montrer que $\ker(A^T) = (\text{Im}(A))^\perp$.
3. Montrer que si $\text{Im}(A) = \ker(A)$ alors $A^T + A$ est inversible
4. En déduire que $A^T + A$ est inversible si et seulement si $\text{Im}(A) = \ker(A)$.

Solution de l'exercice

1. (C) : Soit $X \in \ker(A^T + A)$. On a $(A^T + A)X = 0$ donc $A(A^T + A)X = 0$ donc $AA^T X$ donc $X^T AA^T X = 0$ donc $\|A^T X\|^2 = 0$ donc $X \in \ker(A^T)$.
On a donc $(A^T + A)X = 0$ et $A^T X = 0$ donc $AX = 0$ donc $X \in \ker(A)$.
2. Soit $X \in \ker(A^T)$.
On a $A^T X = 0$
Soit $Y \in \text{Im}(A) : \exists T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), Y = AT$. On a $(Y|X) = (AT|X) = (AT)^T X = T^T A^T X = (T|A^T X) = 0$.
donc $\ker(A) \subset \text{Im}(A)^\perp$.
On obtient l'égalité des dimensions en utilisant:
 - le fait que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.
 - le th du rang appliqué à A .
 - Le fait que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = (\text{Im}(A))^\perp \oplus \text{Im}(A)$
3. On suppose $\text{Im}(A) = \ker(A)$.
On a bien $\{0\} = \ker(A) \cap (\ker(A))^\perp = \ker(A) \cap (\text{Im}(A))^\perp = \ker(A) \cap \ker(A^T) = \ker(A + A^T)$
donc $\ker(A + A^T) = \{0\}$ donc $A^T + A$ est inversible (injectivité implique bijectivité pour un endomorphisme en dimension finie).
4. Supposons $A^T + A$ est inversible.
De plus $A^2 = 0$ donc $\text{Im}(A) \subset \ker(A)$.
D'après Q1, $\ker(A) \cap \ker(A^T) = \{0\}$ donc $\ker(A) \cap (\text{Im}(A))^\perp = \{0\}$ donc $\dim(\ker(A)) + \dim((\text{Im}(A))^\perp) \leq n$ (propriété des sous-espaces en somme directe).
On a donc $\dim(\ker(A)) + n - \dim((\text{Im}(A))) \leq n$ donc $\dim(\ker(A)) \leq \dim((\text{Im}(A)))$.
De plus $A^2 = 0$ donc $\text{Im}(A) \subset \ker(A)$.
On a donc $\dim(\ker(A)) = \dim((\text{Im}(A)))$ donc $\ker(A) \leq \text{Im}(A)$

Exercice 9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Exprimer le polynôme caractéristique de B à l'aide de celui de A .
2. On suppose que B est diagonalisable. Montrer que χ_A est scindé et $sp(A) \subset [0, +\infty[$.
3. Exprimer le rang de B en fonction du rang de A .
4. Montrer que si $0 \in sp(A)$ alors B n'est pas diagonalisable.
5. Soit $\lambda \in sp(A)$. On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$. Montrer que $\dim(E_\mu(B)) = \dim(E_{-\mu}(B)) = \dim(E_\lambda(A))$.
6. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $sp(A) \subset]0, +\infty[$.

Solution de l'exercice: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B la matrice définie par blocs par $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

1. $\det(xI_{2n} - B) = \begin{vmatrix} xI_n & -I_n \\ -A & xI_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -I_n \\ -A + x^2I_n & xI_n \end{vmatrix} (C_i \leftarrow C_i + xC_{n+i} \text{ pour } 1 \leq i \leq n)$
 $\det(xI_{2n} - B) = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & I_n \\ x^2I_n - A & -xI_n \end{vmatrix} (C_i \leftarrow -C_i + xC_{n+i} \text{ pour } n+1 \leq i \leq 2n)$
 $\det(xI_{2n} - B) = (-1)^n \times (-1)^n \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ -xI_n & x^2I_n - A \end{vmatrix} (C_i \leftrightarrow C_{n+i} \text{ pour } 1 \leq i \leq n)$
 $\det(xI_{2n} - B) = \det(I_n) \det(x^2I_n - A)$ (déterminant triangulaire par blocs) donc $\chi_B(x) = \chi_A(x^2)$.
2. Soit $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ une racine complexe de χ_A . On a $\chi_B(\sqrt{|\lambda|}e^{i\theta/2}) = \chi_A(\lambda) = 0$ donc $\mu = \sqrt{|\lambda|}e^{i\theta/2}$ est une racine complexe de χ_B . Or B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc χ_B est scindé dans $\mathbb{R}$ donc $\mu \in \mathbb{R}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Toute racine complexe de χ_A est réelle donc χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(C_{i_1}(A), \dots, C_{i_r}(A))$ une base de l'espace engendré par les colonnes de A .
D'une part, On peut obtenir toute colonne de B comme combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix} E_1 \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_1}(A) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_r}(A) \end{pmatrix} \right)$.
D'autre part, la famille $\left(\begin{pmatrix} E_1 \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_1}(A) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_r}(A) \end{pmatrix} \right)$ est une libre:
Supposons $\lambda_1 \begin{pmatrix} E_1 \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} E_n \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_1}(A) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ C_{i_r}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Alors $\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \lambda_k E_k = 0 \\ \sum_{k=1}^r \alpha_k C_{i_k} = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k E_k = 0$ et $\sum_{k=1}^r \alpha_k C_{i_k} = 0$ et,
comme $(E_1, \dots, E_n)$ et $(C_{i_1}(A), \dots, C_{i_r}(A))$ sont libres donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$,
donc $rg(B) = n + rg(A)$.
Remarque: Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
 $X \in \ker(B) \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = 0 \\ AX_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_1 \in \ker(A)$.
On en déduit que $\dim(\ker(B)) = \dim(\ker(A))$ donc $rg(B) = n + rg(A)$ (th du rang).
4. Supposons $0 \in sp(A)$ et α la multiplicité de 0 comme valeur propre de A .
Le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^\alpha \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec $\lambda_i \neq 0$)
On en déduit $\chi_B = X^{2\alpha} \prod_{i=1}^k (X^2 - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et donc $0 \in sp(B)$ avec une multiplicité 2α .
donc par le théorème du rang, $\dim(E_0(B)) = 2n - rg(B) = n - rg(A) = \dim(E_0(A)) \leq \alpha$ donc $\dim(E_0(B)) < 2\alpha$ donc B n'est pas diagonalisable.
5. Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On a $BX = \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix}$ donc $BX = \mu X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_2 \\ AX_1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} X_2 = \mu X_1 \\ AX_1 = \mu^2 X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 \in E_\lambda(A) \\ X_2 = \mu X_1 \end{cases}$.
Soit $k = \dim(E_\lambda(A))$ et $(U_1, \dots, U_k)$ une base de $E_\lambda(A)$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ \mu U_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} U_k \\ \mu U_k \end{pmatrix} \right)$ est une base de k vecteur propre de B associés à μ donc $\dim(E_\mu(B)) = \dim(E_\lambda(A))$.
On obtient de même que $\dim(E_{-\mu}(B)) = \dim(E_\lambda(A))$.

6. ($\Rightarrow$) déjà vu.

Supposons A diagonalisable et $sp(A) \subset]0, +\infty[$.

$\sum_{\lambda \in sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$ et $\lambda \neq 0 \Rightarrow \mu \neq -\mu$ donc $\dim(E_\mu(B)) + \dim(E_{-\mu}(B)) = 2 \dim(E_\lambda(A))$.

En sommant sur tout les λ dans $sp(A)$, on obtient que $\sum_{\gamma \in sp(B)} \dim(E_\gamma(B)) \geq 2 \sum_{\lambda \in sp(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 2n$ donc B est diagonalisable.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ non réduit à $\{0\}$ et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que f admet un vecteur propre.
2. Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace stable par f . Montrer que f admet un vecteur propre appartenant à F .
3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose que $AB = 0$.
 - (a) Montrer que les matrices A et B ont un vecteur propre commun.
 - (b) Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.

Solution de l'exercice:

1. $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$ donc est scindé donc $sp(f) \neq \emptyset$.

2. F étant stable par f , on peut appliquer Q1 à l'endomorphisme f_F induit par f sur F .

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in F$ vérifiant $\begin{cases} x \neq 0 \\ f_F(x) = f(x) = \lambda x \end{cases}$

3. On suppose que $AB = 0$.

(a) Soit f et g les endomorphismes canoniquement associés respectivement à A et B .

Si $\text{Im}(g) = \{0\}$ alors $g = 0$ tout vecteur de E est vecteur propre de g .

Un vecteur propre de f est vecteur propre commun de f et g donc de A et B .

Si non

On a $f \circ g = 0$ donc $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$: $\forall x \in \text{Im}(g), f(x) = x = 0x$.

De plus, $\text{Im}(g)$ est stable par g donc d'après Q2, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \text{Im}(g)$ tels que $x \neq 0$ et $g(x) = \lambda x$

On a donc x vecteur propre commun à f et g soit à A et B .

(b) Montrons par récurrence finie sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T_A, T_B triangulaires supérieures telles que $P^{-1}AP = T_A$ et $P^{-1}BP = T_B$.

C'est vrai pour $n = 1$ toute matrice est triangulaire supérieure.

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie au rang n .

Soit $t(A, B) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})^2$. On suppose que $AB = 0$.

Soit P_1 la matrice de passage de la base canonique vers une base de premier vecteur un vecteur propre commun à A et B .

On a donc $A' = P_1^{-1}AP_1 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right)$ et $B' = P_1^{-1}BP_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mu & L_2 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right)$.

On a $AB = 0$ donc $A'B' = P_1AP_1^{-1}P_1BP_1^{-1} = P_1ABP_1^{-1} = 0$.

Or $A'B' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} \mu & L_2 \\ \hline 0 & B_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & L \\ \hline 0 & A_1B_1 \end{array} \right)$ et $B'A' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & M' \\ \hline 0 & B_1A_1 \end{array} \right)$.

On en déduit que $A_1B_1 = B_1A_1$ et A_1 et B_1 sont de taille n .

D'après (HR), $\exists P_2$ telle que $P_2^{-1}A_1P_2 = T_{A_1}$ et $P_2^{-1}B_1P_2 = T_{B_1}$ avec T_{A_1} et T_{B_1} triangulaires supérieures.

Posons $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right)$. Le calcul par bloc donne que $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right) = I_{n+1}$ donc Q est inversible et

$Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2^{-1} \end{array} \right)$

$Q^{-1}A'Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2^{-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & P_2^{-1}A_1P_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & T_{A_1} \end{array} \right) = T_A$ triangulaire supérieur

et on peut faire la même chose avec B' .

Or $A' = P_1^{-1}AP_1$ donc $Q^{-1}P_1^{-1}AP_1Q = (P_1Q)^{-1}A(P_1Q) = T_A$ et même chose avec B ce qui achève la récurrence.

Exercice 11 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors tout sous-espace propre de u est stable par v (cours)
2. Montrer que si u et v sont diagonalisables alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et v .

Solution de l'exercice:

1. Propriété de cours (dem faite en cours)

2. Soit $\lambda \in sp(u)$.

Le sous espace $E_\lambda(u)$ est stable par v donc (d'après le cours), l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$ est diagonalisable.

Il existe donc une base b_λ de $E_\lambda(u)$ formée de vecteurs propres de v .

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de u .

Comme u est diagonalisable, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ donc (th de juxtaposition des bases)

$b = (b_{\lambda_1}, \dots, b_{\lambda_k})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de u et de v .