

SUJET DE REVISION d'analyse
(intégrales, séries de fonctions, séries entières, équations différentielles, calcul)

Pour tout nombre entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction J_n de la variable réelle x par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

PARTIE I

Q 1 Montrer que J_n est définie sur \mathbb{R} et étudier la parité de la fonctions J_n .

Q 2 Exprimer $J_{-n}(x)$ en fonction de $J_n(x)$.

On supposera dorénavant que n est un nombre entier positif ou nul.

Q 3 Montrer que J_n est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Q 4 Montrer que l'on a $J'_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \times (n - x \cos t) \times \cos(nt - x \sin t) dt$.

Q 5 En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_n) : x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

PARTIE II

Q 6 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2pt) \times \cos(x \sin t) dt,$$

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((2p+1)t) \times \sin(x \sin t) dt.$$

Q 7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n est développable en série entière de x sur \mathbb{R} tout entier.

Q 8 Soit p un nombre entier naturel.

a Calcul de $\int_0^\pi \cos(2pt) \times \sin^{2k}(t) dt$.

i Montrer que si $0 \leq k < p$ alors $\int_0^\pi \cos(2pt) \times \sin^{2k}(t) dt = 0$.

(on pourra exprimer $\sin^{2k}(t)$ comme combinaison linéaire des $\cos 2qt$, avec $0 \leq q \leq k$).

ii Calculer $\int_0^\pi \cos(2pt) \times \sin^{2p}(t) dt$.

b En déduire les coefficients $\alpha_{2k}(p)$ du développement en série entière $J_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}(p)x^{2k}$ de J_{2p} sur \mathbb{R} .

- c Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin^{2k+1}(t) dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p .
Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k < p$.
- d En déduire les coefficients $\alpha_{2k+1}(p)$ du développement en série entière $J_{2p+1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1}(p)x^{2k+1}$ de J_{2p+1} sur \mathbb{R} .

PARTIE III

On considère l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_\lambda) : x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

où λ est un nombre réel donné.

Q 9 Montrer que, pour que $x^\lambda z(x)$ soit solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$, il faut et il suffit que z soit solution de l'équation :

$$(B'_\lambda) : xz'' + (2\lambda + 1)z' + xz = 0.$$

Q 10 Dans le cas où $\lambda = -\frac{1}{2}$, déterminer la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$, et en déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

Q 11 En déduire la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$.

On se propose à présent de chercher les solutions de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $y(x) = x^\lambda z(x)$, où $z(x)$ est la somme d'une série entière.

Q 12 On cherche les solutions de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$.

a Etablir la relation qui doit exister pour tout $k \geq 1$ entre a_{k+1} et a_{k-1} pour que z soit solution de (B'_λ) .
On suppose dorénavant que λ n'est pas un entier strictement négatif.

b Montrer qu'il existe une unique solution z_λ de (B'_λ) de la forme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, et telle que $a_0(\lambda) = 1$.

Calculer $a_{2p}(\lambda)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2p}(\lambda)x^{2p}$?

c On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction j_λ par $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$.

i On suppose que λ n'est pas un nombre entier.

Montrer que les fonctions j_λ et $j_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

En déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

ii Soit n un nombre entier strictement positif.

Comparer j_n à la fonction J_n , définie au début du problème.

Vérifier que la fonction z_{-n} , définie par $z_{-n}(x) = x^{2n} z_n(x)$ est solution de l'équation (B'_{-n}) .

Fin de l'énoncé

CORRECTION

PARTIE I

R 1 Soit x fixé. l'application $t \mapsto \cos(nt - x \sin t)$ est continue sur $[0, \pi]$. cela garantit l'existence de l'intégrale $\int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de J_n est \mathbb{R} donc est symétrique par rapport à 0 et si $x \in \mathbb{R}$, on a, via le changement de variable $u = \pi - t$:

$$J_n(-x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt + x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi - nu + x \sin u) du = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-1)^n \cos(nu - x \sin u) du = (-1)^n J_n(x)$$

donc J_n a la parité de n .

R 2 On a $J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-nt - x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt + x \sin t) dt = J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ d'après la question précédente.

R 3 Posons $\phi(x, t) = \cos(nt - x \sin t)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$;

Soit $t \in [0, \pi]$. La fonction $x \mapsto \phi(x, t)$ est de classe C^n et $\forall k \in [[0, n]]$, $\frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(x, t) = (-\sin t)^k \cos(nt - x \sin t + n\frac{\pi}{2})$ qui est continue sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$.

(remarque: notez l'astuce qui consiste à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à chaque dérivation, ce qui simplifie la présentation car sinon on doit distinguer suivant la parité de k).

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in [0, p]$. Les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(x, t)$ sont continues donc continues par morceaux sur $[0, \pi]$.

$|\frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(x, t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue donc intégrable sur $[0, \pi]$

On en déduit que J_n est de classe C^p sur \mathbb{R} de J_n et $J_n^{(p)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-\sin t)^k \cos(nt - x \sin t + n\frac{\pi}{2}) dt$.

Or p étant arbitraire, cela montre le caractère C^∞ de J_n .

R 4 Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, J_n est dérivable sur \mathbb{R}

$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = (-\sin t) (-\sin(nt - x \sin t))$ et $J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cdot \sin(nt - x \sin t) dt$.

Une IPP avec $\begin{cases} u'(t) = \sin t & \text{si } u(t) = -\cos t \\ v(t) = \sin(nt - x \sin t) & \text{donc } v'(t) = (n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t) \end{cases}$ valide car u et v sont C^1 sur $[0, \pi]$, donne :

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi} [\cos t \cdot \sin(nt - x \sin t)]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cdot [(n - x \cos t) \cos(nt - x \sin t)] dt$$

Le crochet étant nul, on obtient le résultat voulu.

R 5 On a aussi: $J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t \cos(nt - x \sin t) dt$. Et donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) \{-x^2 \sin^2 t + x(n - x \cos t) \cos t + (x^2 - n^2)\} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n(x \cos t - n) \cos(nt - x \sin t) dt = -\frac{n}{\pi} [\sin(nt - x \sin t)]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

PARTIE II

R 6 Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$; on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2pt - x \sin t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(2pt) \cos(x \sin t) - \sin(2pt) \sin(x \sin t)) dt$$

Le changement de variable $t = \pi - u$ permet de montrer que

$$\int_0^\pi \sin(2pt) \sin(x \sin t) dt = - \int_0^\pi \sin(2pu) \sin(x \sin u) du \text{ et donc } \int_0^\pi \sin(2pt) \sin(x \sin t) dt = 0.$$

D'où l'égalité demandée.

Le même procédé fournit l'égalité $J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin(x \sin t) dt$.

R 7 Traitons le cas $n = 2p$; on sait que $\cos u = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!}$ avec un rayon de convergence infini.

Donc pour tout $t \in [0, \pi]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x \sin t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k}(t)}{(2k)!}$.

Soit x fixé. Posons $u_k(t) = (-1)^k \frac{x^{2k} \sin^{2k}(t)}{(2k)!}$.

La série fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $[0, \pi]$ puisque $|u_k(t)| \leq \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ indépendant de t et $\sum \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ converge vers $\cosh |x|$.

La convergence est donc uniforme sur $[0, \pi]$ et on peut intervertir \sum et \int :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k}(t) dt$$

avec convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$; c'est le DSE de J_{2p} valide sur \mathbb{R} .

On obtient exactement de la même façon :

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^\pi \sin(2p+1)t \cdot \sin^{2k+1}(t) dt$$

R 8 (question sur les polynômes de Tchebychev)

a (i) On a

$$\sin^{2k}(t) = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k} = \frac{1}{(2i)^{2k}} \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \binom{2k}{h} e^{i(2k-2h)t}$$

$$\text{et } \sin^{2k}(t) = \text{Re}(\sin^{2k}(t))$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{(-1)^k}{4^k} \sum_{h=0}^{2k} (-1)^h \binom{2k}{h} \cos(2(k-h)t)$$

$$\sin^{2k}(t) = \frac{(-1)^k}{4^k} \sum_{q=-k}^k (-1)^{k-q} \binom{2k}{k-q} \cos(2qt) \text{ (cht d'indice } q = k-h)$$

$$= \frac{(-1)^k}{4^k} \left(1 + \sum_{q=1}^k (-1)^{k-q} \binom{2k}{k-q} \times 2 \cos(2qt) \right) \text{ (parité de } \cos)$$

En utilisant la formule de linéarisation de $\cos(at) \times \cos(bt)$ on montre que $\int_0^\pi \cos(at) \cos(bt) dt = 0$ si $a \neq b$.

Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a : $\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k}(t) dt = 0$

b (ii) si $k \geq p$, on a $\sin^{2k}(t) = \frac{(-1)^k}{4^k} \left(1 + \sum_{q=1}^k (-1)^{k-q} \binom{2k}{k-q} \times 2 \cos(2qt) \right)$ donc,

compte tenu que $\int_0^\pi \cos(at) \cos(bt) dt = 0$ si $a \neq b$.

$$\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k}(t) dt = \frac{(-1)^k}{4^k} \sum_{q=1}^k (-1)^{k-p} \binom{2k}{k-p} \times 2 \int_0^\pi \cos^2(2pt) dt$$

donc comme $\int_0^\pi \cos^2(2pt) dt = \frac{\pi}{2}$ (linéariser)

$$\int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k}(t) dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k+p} \pi$$

On en déduit aussitôt que :

$$\begin{aligned} J_{2p}(x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^\pi \cos(2pt) \sin^{2k}(t) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k+p} \pi \\ &= \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)! (k-p)!} x^{2k} \end{aligned}$$

donc, par unicité du DSE

$$\alpha_{2k}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)! (k-p)!} & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

c Pour ceux qui aiment, on en remet une couche.

$$\begin{aligned} \sin^{2k+1}(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2k+1} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \sum_{h=0}^{2k+1} (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{i(2k+1-2h)t} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \left(\sum_{h=k+1}^{2k+1} (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{i(2k+1-2h)t} + \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{i(2k+1-2h)t} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{h=k+1}^{2k+1} (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{i(2k+1-2h)t} = \sum_{q=0}^k (-1)^{k+1-q} \binom{2k+1}{k+1+q} e^{-i(1+2q)t} \quad (h = k+1+q)$$

et—

$$\sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{2k+1}{h} e^{i(2k+1-2h)t} = \sum_{q=0}^k (-1)^{k-q} \binom{2k+1}{k-q} e^{i(1+2q)t} \quad (q = k-h)$$

donc , compte tenu du fait que $k+1+q = (2k+1) - (k-q)$

$$\begin{aligned} \sin^{2k+1}(t) &= \frac{1}{(2i)^{2k+1}} \sum_{q=0}^k (-1)^{k-q} \binom{2k+1}{k-q} (e^{i(1+2q)t} - e^{-i(1+2q)t}) \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{q=0}^k (-1)^{k-q} \binom{2k+1}{k-q} \sin((1+2q)t) : (\mathcal{R}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\int_0^\pi \sin(at) \sin(bt) dt = 0$ si $a \neq b$.

Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a :

$$\int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1}(t) dt = 0$$

d Si $k \geq p$, en prenant $h = k - p$ on a :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1}(t) dt &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} (-1)^{k-p} \binom{2k+1}{k-p} \int_0^\pi \sin^2((2p+1)t) dt \text{ d'après } (\mathcal{R}) \\ &= \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit aussitôt que :

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^\pi \sin((2p+1)t) \sin^{2k+1}(t) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

soit

$$J_{2p+1}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{2 \cdot 4^k (k-p)! (k+1+p)!} x^{2k+1}$$

donc, par unicité du DSE

$$\alpha_{2k+1}(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{2 \times 4^k (k-p)! (k+1+p)!} & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

PARTIE III

R 9 Posons $y(x) = x^\lambda z(x)$ et supposons z deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$; alors il en est de même de y et pour $x \in]0, +\infty[$:

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} z(x) + x^\lambda z'(x) \quad y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} z(x) + 2\lambda x^{\lambda-1} z'(x) + x^\lambda z''(x)$$

on en déduit que y est solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ ssi

$$x^{\lambda+1}(xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x)) = 0$$

et comme $x > 0$, ceci équivaut à

$$xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x) = 0$$

R 10 On suppose $\lambda = -\frac{1}{2}$; on a alors sur $]0, +\infty[$ z solution de $(B'_{-\frac{1}{2}})$ ssi

$$z'' + z = 0 \text{ ssi il existe } A, B \in \mathbb{R} \mid \forall x, z(x) = A \cos x + B \sin x$$

et donc

$$y \text{ solution de } (B_{-\frac{1}{2}}) \text{ ssi il existe } A, B \in \mathbb{R} \mid \forall x, y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$$

R 11 En observant que $(B_{-\frac{1}{2}}) = (B_{\frac{1}{2}})$, on en déduit que les solutions sur $]0, +\infty[$ de $(B_{\frac{1}{2}})$ sont aussi les fonctions $x \mapsto \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}$ (A et B décrivant \mathbb{R}) ;

la solution générale sur $]0, +\infty[$ de $(B'_{\frac{1}{2}})$ est alors :

$$y(x) = \frac{A \cos x + B \sin x}{x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

R 12 Supposons que, $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ (avec un rayon de convergence $R > 0$) est solution de (B'_λ) ;

a La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence on peut dériver terme à terme:

$$\forall x \in]-R, R[, z'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k \quad \text{et} \quad z''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)k a_{k+1}x^{k-1}$$

et donc z est solution de (B'_λ) ssi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} (2\lambda+1)(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

soit encore,

$$a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} [k(k+1)a_{k+1} + (2\lambda+1)(k+1)a_{k+1} + a_{k-1}] x^k = 0$$

L'unicité du DSE fournit alors : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$(2\lambda+1)a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, (k+1)(2\lambda+1+k)a_{k+1} + a_{k-1} = 0$$

b Notons $a_k(\lambda) = a_k$;

On cherche les solutions vérifiant $a_{2k+1}(\lambda) = 0$ pour tout k et $a_0(\lambda) = 1$.

Comme $-\lambda \notin \mathbb{N}$, on note que $\lambda + h \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.

La relation de la question précédente donne pour $k \in \mathbb{N}^*$: $(2k)(2\lambda+2k)a_{2k} + a_{2k-2} = 0$; D'où

$$a_{2k}(\lambda) = \frac{(-1)^k}{\prod_{h=1}^k 2h(2\lambda+2h)} \times a_0(\lambda) = \frac{(-1)^k}{4^k k! \prod_{1 \leq h \leq k} (\lambda+h)}$$

Donc SI il existe une solution de (B'_λ) de la forme $z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, avec $a_0(\lambda) = 1$

ALORS on a nécessairement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda+h)}$.

Réciproquement, la série entière $\sum \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda+h)} x^{2p}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$ puisque en utilisant la règle de de d'Alembert, la limite

$$\frac{|a_{2p+2}(\lambda)x^{2p+2}|}{|a_{2p}(\lambda)x^{2p}|} = \frac{x^2}{4(p+1)|\lambda+p+1|} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

montre que la série numérique $\sum \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} (\lambda+h)} x^{2p}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme on pouvait raisonner par équivalence dans la question précédente,

la somme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$ est \mathbb{R} -solution, donc $]0, +\infty[$ -solution de (B'_λ) .

c (i) : On suppose λ non entier, ce qui précède s'applique à $-\lambda$ et $z_{\pm\lambda}$ est solution de $(B'_{\pm\lambda})$ donc $j_{\pm\lambda}$ est solution (non nulle) sur $]0, +\infty[$ de l'équation $(B_{\pm\lambda}) = (B_\lambda)$.

Remarquons que z_λ et $z_{-\lambda}$ sont continues sur \mathbb{R} , donc bornées au voisinage de 0. Si par exemple $\lambda > 0$, j_λ est bornée au voisinage de 0, alors que $\lim_{x \rightarrow 0} j_{-\lambda}(x) = +\infty$, donc $j_{-\lambda}$ est non bornée au voisinage de 0 et donc j_λ et $j_{-\lambda}$ sont non proportionnelles.

Or (B_λ) est linéaire, homogène, résolue en y'' , à coefficients continus sur $]0, +\infty[$ donc d'après le cours, l'ensemble des $]0, +\infty[$ -solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

La famille $(j_\lambda, j_{-\lambda})$ étant libre de cardinal 2 est donc une base de (B_λ) et la solution générale de (B_λ) est donc :

$$y(x) = Ax^\lambda z_\lambda(x) + Bx^{-\lambda} z_{-\lambda}(x), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(ii): On a $j_n(x) = x^n z_n(x) = x^n \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(n)x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{1 \leq h \leq p} n+h} x^{2p+n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p n!}{4^p p! (n+p)!} x^{2p+n}$.

Supposons par exemple, n pair : $n = 2q$; on a alors :

$$j_{2q}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2q)!}{4^p p! (q+p)!} x^{2p+2q}$$

Posons $k = p + q$; il vient $j_{2q}(x) = 4^q (2q)! \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-q}}{4^k (k-q)! (k+q)!} x^{2k}$.

On reconnait le DSE(0) de $J_{2q}(x)$. Donc $j_{2q} = 4^q (2q)! J_{2q}$.

De même, si n est impair : $n = 2q + 1$; on a alors :

$$j_{2q+1}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p p!} \frac{(2q+1)!}{(2q+1+p)!} x^{2p+2q+1}$$

Posons $k = p + q$; il vient : $j_{2q+1}(x) = 4^q (2q+1)! \sum_{k=q}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-q}}{4^k (k-q)! (k+1+q)!} x^{2k+1}$.

On reconnait le DSE(0) de J_{2q+1} ; donc $j_{2q+1} = 2 \cdot 4^q (2q+1)! J_{2q+1}$.

z_n est solution de (B'_n) et pour tout $x > 0$, on a : $z'_{-n}(x) = 2nx^{2n-1}z_n(x) + x^{2n}z'_n(x)$ puis $z''_{-n}(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2}z_n(x) + 4nx^{2n-1}z'_n(x) + x^{2n}z''_n(x)$.

On en déduit que $xz''_{-n}(x) + (-2n+1)z'_{-n}(x) + xz_{-n}(x) = x^{2n} [xz''_n(x) + (2n+1)z'_n(x) + xz_n(x)] = 0$.

Ce qui démontre que z_{-n} est solution de (B'_{-n}) .

FIN

Questions hors programme séries de fourier

Q 13 On fixe $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction des valeurs des $J_n(x)$ les coefficients de Fourier des fonctions $\cos(x \sin t)$ et $\sin(x \sin t)$ de la variable t . Ces deux fonctions sont-elles égales à la somme de leurs séries de Fourier ?

Q 14 En déduire la valeur des sommes $J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(x)$, $J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x)$, $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p+1}(x)$ et $J_0(x)^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(x)^2$.

II.4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$; les applications $u : t \mapsto \cos(x \sin t)$ et $v : t \mapsto \sin(x \sin t)$ sont dans $C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc d'après un théorème de Dirichlet, elles sont développables en série de Fourier avec convergence uniforme sur \mathbb{R} .

u est paire donc $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt = 2J_0(x)$ et

$$a_n(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(nt + x \sin t) + \cos(nt - x \sin t)) dt = J_n(x) [(-1)^n + 1] = \begin{cases} 2J_n(x) & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

v est impaire donc $a_n(v) = 0$ pour tout n et

$$b_n(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(nt - x \sin t) - \cos(nt + x \sin t)) dt = J_n(x) [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 2J_n(x) & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec CVU sur \mathbb{R} :

$$\cos(x \sin t) = J_0(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} 2J_{2p}(x) \cos(2pt) \quad \sin(x \sin t) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2J_{2p+1}(x) \sin[(2p+1)t]$$

II.4.2 Avec $t = \frac{\pi}{2}$ puis $x = 0$ dans la première, on a :

$$J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p J_{2p}(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x) = 1$$

Puisque u et v sont C^1 sur \mathbb{R} , la formule de Parseval s'applique et donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(x \sin t) dt = \frac{1}{4} a_0^2(u) + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2(u) = J_0^2(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x)$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x \sin t) dt = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}^2(v) = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

En ajoutant il vient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2(x \sin t) + \sin^2(x \sin t)) dt = J_0^2(x) + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x) + 2 \sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

soit en regroupant les séries $1 = J_0^2(x) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(x)$.

Le regroupement mérite un mot d'explication : si les séries numériques $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2n}$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{2n+1}$ sont convergentes,

alors, $\sum_{p=0}^{+\infty} u_n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$. Il suffit de considérer la somme partielle : $\sum_{n=0}^p u_n = \sum_{n=0}^{E(\frac{p}{2})} u_{2n} + \sum_{n=0}^{E(\frac{p-1}{2})} u_{2n+1}$ et de passer à la limite sur p .