Révisions (30 et 31 mars)

I Algèbre linéaire

Exercice 1 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant* $A^3 = A + I_n$.

1. *Montrer que* A *admet au plus une valeur propre.*
2. *Etudier le signe de* $\det(A)$.

Exercice 2 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto tr(AM) I_n \end{array} \right.$.

1. *Justifier que* φ *est linéaire.*
2. *Déterminer* φ^2. *En déduire que l'endomorphime* φ *est-il diagonalisable?*

Exercice 3 *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Calculer* M^2. *Donner une matrice diagonale semblable à* M.

Exercice 4 *On pose* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*et* $\varphi \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightharpoonup \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA. \end{array} \right.$.

1. *Justifier que* φ *est linéaire.*
2. *Déterminer la trace de l'endomorphisme de* φ.

Exercice 5 *Soit* $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right)$.

1. *Déterminer les valeurs propres de* A*:*
   (a) *En utilisant la définition des valeurs propres et vecteurs propres.*
   (b) *Avec le polynôme caractéristique.*
   (c) *A l'aide d'un polynôme annulateur.*
2. *Montrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et diagonaliser* A.

Exercice 6 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. *Diagonaliser* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Préciser une matrice* $P \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}MP$ *est diagonale. Calculer* P^{-1}.
2. *En déduire que* B *est semblable à* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.
3. *Montrer que si* A *est diagonalisable alors* B *est diagonalisable.*
4. *Montrer la réciproque.*

II Espaces euclidiens

Exercice 7 *Soit* E *un espace euclidien,* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormée de* E *et* u *un endomorphisme autoadjoint de* E. *Montrer que* $tr(u^2) = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$.

Exercice 8 *On suppose* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire usuel et* $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x+ \right\}$

Exercice 9 *On considère* $E = \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $(f \mid g) = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$.
On pose, pour $x \in [0,1]$, $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x$ *et* $v(x) = \sqrt{x}$ *et* $F = vect(u_0, u_1)$.

1. *Déterminer le projeté orthogonale de* v *sur* F.

2. *En déduire la borne inférieure de* $\left\{ \sqrt{\int_0^1 (a+bx-\sqrt{x})\,dx},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 10 *Soit E un espace euclidien et p et q des projecteurs orthogonaux de E. On pose $f = p\circ q\circ p$*

1. *Montrer qu'une projection orthogonale de E est un endomorphisme autoadjoint (cours) positif.*
2. *Montrer que $\forall x\in E,\ \|p(x)\| \leq x$ (cours).*
3. *Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.*
4. *Montrer que $sp(f)\subset[0,1]$.*
5. *Montrer que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par f.*
6. *Soit u l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(p)$. Justifier que $\mathrm{Im}(p)$ admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de u qui sont aussi vecteurs propres de $p\circ q$.*
7. *Soit $F = \mathrm{Im}(p)+\ker(q)$.*
   (a) *Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(A+B)^\perp = A^\perp\cap B^\perp$.*
   (b) *Montrer que $F^\perp = \ker(p)\cap\mathrm{Im}(q)$.*
   (c) *En déduire que $p\circ q$ est diagonalisable et $sp(p\circ q)\subset[0,1]$.*
   (On pourra utiliser la version suivante du théorème de la base incomplète:
   Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, espace vectoriel de dimension finie, on peut compléter une famille libre de E en une base en y adjoignant des vecteurs de $\mathcal{G}$.)
8. *Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de E.*
   (a) *Justifier que $tr(p\circ q) = \sum\limits_{i=1}^{n}(p\circ q(e_i)|e_i)$.*
   (b) *En déduire que $tr(p\circ q)\leq\min(rg(p), rg(q))$.*

III Analyse

Exercice 11 *Etudier le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum n^3x^n$.*

Exercice 12 *Justifier que $x\mapsto\arcsin(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser ce développement.*

Exercice 13 *Montrer que la fonction* $\left\{\begin{array}{c}\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*\\ x\mapsto\dfrac{e^x-\cos(x)-\sin(x)}{x^2}\end{array}\right.$ *admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 14 *On considère l'équation différentielles suivante: $(\mathcal{E}): x(x-1)y''+3xy'+y=0$.*

1. Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ développables en séries entières
2. On pose $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ et, pour $x\in\,]0,1[$, on pose $y(x) = f(x)z(x)$.
   a Montrer que y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall x\in\,]0,1[,\ x(1-x)z''(x)-(x-2)z'(x)=0$.
   b En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,1[$. (on pourra admettre que $\forall x\in\,]0,1[\ \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x}-\frac{1}{1-x}$).
   c La fonction $x\mapsto\dfrac{x\ln(x)}{(1-x^2)}$ admet-elle un prolongement de classe C^1 sur $[0,1[$?
   d Montrer qu'il n'existe pas de solutions de $(\mathcal{E})$ sur $[0,1]$.

Exercice 15 *Justifier que $x\mapsto\arctan(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et montrer que l'égalité obtenue se prolonge pour $x=1$*