# Révisions (30 et 31 mars)

## I Algèbre linéaire

**Exercice 1** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$.*

1. *Montrer que $A$ admet au plus une valeur propre.*
2. *Etudier le signe de* $\det(A)$.

**Solution de l'exercice:**

1. Lien entre polynôme annulateur et spectre? Variations de $x \mapsto x^3 - x - 1$.
2. Passage dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour appliquer le thèorème sur le déterminant et valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

**Exercice 2** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et* $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto tr(AM)\, I_n \end{array} \right.$.

1. *Justifier que $\varphi$ est linéaire.*
2. *Déterminer $\varphi^2$.*
3. *Montrer que si $tr(A) \neq 0$ alors $\varphi$ est diagonalisable?*
4. *On suppose que $A \neq 0$ et $tr(A) = 0$. Montrer $\varphi\left(A^T\right) \neq 0$.*
   *Que peut-on en déduire?*

**Solution de l'exercice:**

1. Découle de la linéarité de la trace.
2. En utilisant la linéarité de la trace, on montre que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi^2(M) = n\varphi(M)$.
   On en déduit un polynôme annulateur scindé à racines simples.

**Exercice 3** *Soit* $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Justifier que $M$ est diagonalisable et admet au plus* 3 *valeurs propres.*
2. *Calculer $M^2$.*
3. *Donner une matrice diagonale semblable à $M$.*

**Solution de l'exercice:**

1. $M$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
   On remarque que $rg(M) = 2$ donc $\dim(\ker(M)) = n - 2$ donc $0 \in sp(M)$ et $\dim E_0(M)$
2. On obtient $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$.
3. Première méthode:

   On obtient de même que $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \\ n & \cdots & n & n + (n-1) \end{pmatrix} = M^2 + (n-1)\, M$. donc $P = X^3 - X^2 - (n-1)\, X$ est annulateur de $M$.
   Or $P = X\left(X^2 - X - (n-1)\right)$ de racines $0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2}, \lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4(n-1)}}{2}$.
   donc $sp(M) \subset \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et comme $P$ est scindé à racines simples, la matrice $A$ est diagonalisable.
   Donc $M$ est semblable à $D = diag(0, \ldots, 0, \lambda, \mu)$ avec $\lambda \in \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ et $\mu \in \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.
   Or $tr(M) = tr(D) = \lambda + \mu = 1$, on a forcément $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{\lambda, \mu\}$ donc $M$ est semblable à $D = diag(0, \ldots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$.
   :

**Exercice 4** *On pose* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.*et* $\varphi \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightharpoonup \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA. \end{cases}$.

1. *Justifier que* $\varphi$ *est linéaire.*
2. *Déterminer la trace de l'endomorphisme* $\varphi$

**Solution de l'exercice:**
Se placer dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires. Ecrire la matrice de $\varphi$ (de taille 4).

**Exercice 5** *Soit* $A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$.

1. *Déterminer les valeurs propres de A:*
   (a) *En utilisant la définition des valeurs propres et vecteurs propres.*
   (b) *Avec le polynôme caractéristique.*
   (c) *A l'aide d'un polynôme annulateur.*
2. *Montrer que A est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et diagonaliser A.*

**Solution de l'exercice:**

1. Déterminer les valeurs propres de $A$:

   **a** Voir $Q2$

   **b** Faire des échanges de de ligne pour se ramener à un déterminant diagonal par blocs.

   **c** $A^2 = -I_{2n}$ et utiliser le thèorème sur les racines d'un polynôme annulateur.
   Remarquer que $sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$ et $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$.

2. 1: - Théorème sur "p polynôme annulateur et diagonalisabilité"

   2: Soit $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. Posons $X = \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right)$ avec $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ( plutôt que $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$: cette présentation alllège beaucoup les calculs)

   On a $AX = iX \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} X_2 \\ \hline -X_1 \end{array}\right) = i\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow X_2 = iX_1$.

   On en déduit que $E_i(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline iX_1 \end{array}\right), X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}). \right\}$.

   Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

   La famille $\left( \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \hline iE_1 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{c} E_n \\ \hline iE_n \end{array}\right) \right)$ est une famille libre de $E_i(A)$ donc $\dim(E_i(A)) \geq n$ (on peut montrer l'égalité mais ce n'est pas nécessaire)

   De même a famille $\left( \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \hline -iE_1 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{c} E_n \\ \hline -iE_n \end{array}\right) \right)$ est une famille libre de $E_{-i}(A)$ donc $\dim(E_{-i}(A)) \geq n$

   Or $\dim(E_i(A)) + \dim(E_{-i}(A)) = 2n$ donc $\dim(E_i(A)) = \dim(E_{-i}(A)) = n$

   et $\left( \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \hline iE_1 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{c} E_n \\ \hline iE_n \end{array}\right) \right)$ est une base de $E_i(A)$ et $\left( \left(\begin{array}{c} E_1 \\ \hline -iE_1 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{c} E_n \\ \hline -iE_n \end{array}\right) \right)$ est une famille libre de $E_{-i}(A)$

   La juxtaposition de ces famille est une base $b$ de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) = E_i(A) \oplus E_{-i}(A)$ et $P_{b_0}\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline iI_n & -iI_n \end{array}\right)$ et $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} iI_n & 0 \\ \hline 0 & -iI_n \end{array}\right)$.

**Exercice 6** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. *Diagonaliser* $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Préciser une matrice* $P \in GL_2(\mathbb{R})$ *telle que* $P^{-1}MP$ *est diagonale. Calculer* $P^{-1}$.
2. *En déduire que B est semblable à* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.
3. *Montrer que si A est diagonalisable alors B est diagonalisable.*
4. *Montrer la réciproque*

**Solution de l'exercice:**

1. On devine que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à $\lambda = 2$.

   En utilisant la trace l'autre valeur propre est $\mu = 1$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé.

   Si $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   On montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Posons $Q_1 = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & 2I_n \end{pmatrix}$

   On vérifie par le produit par bloc que $Q_1R = I_{2n}$ donc $Q_1$ est inversible d'inverse $R$.

   Le produit par bloc $Q_1^{-1}BQ_1 = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -A \\ -2A & 4A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$.

3. Supposons $A$ diagonalisable.

   Soit $(P, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $P^{-1}AP = D$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. On vérifie que $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$ donc

   $Q_2^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ et on vérifie avec le produit par blocs que

   $Q_2^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & P^{-1}2AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix}$ qui est diagonale.

   Or $B$ est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ donc $B$ est diagonalisable.

4. Supposons $B$ digonalisabale.

   Alors $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

   Soit $f$ est canoniquement associé à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ et $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et $F = vect\,(e_1, \ldots, e_n)$.

   Le sous-espace $F$ est stable par $f$ et l'endomorphisme $g$ induit par $f$ sur $F$ a pour mattrice $A$ danns la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

   D'après le cours, $g$ est diagonalisable donc $A$ est diagonalisable.

# II Espaces euclidiens

**Exercice 7** *Soit $E$ un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $u$ un endomorphisme autoadjoint de $E$.*
*Montrer que $tr\left(u^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2$.*

**Solution de l'exercice:** On a $\sum\limits_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (u(e_i)\,|u(e_i)) = \sum\limits_{i=1}^{n} (u(u(e_i))\,|e_i)$.car $u$ est autoadjoint.
Or $b = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée donc si $A = mat_b(u \circ u)$ alors $a_{i,j}$ est la $i^{ème}$ coordonnée de $u(u(e_j))$ donc $a_{i,j} = ((u(u(e_j))\,|e_i)\,|)$ donc $tr\left(u^2\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} (u(u(e_i))\,|e_i)$, ce qui permet d'aboutir.

**Exercice 8** *On suppose $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + y - z = 0\right\}$.*
*Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F$.*

**Solution de l'exercice:** Posons $u = (x, y, z)$ et $a = (3, 1, -1)$.
On a $u \in F \Leftrightarrow (u|a) = 0$ donc $F = vect\,(a)^{\perp}$ (donc $F^{\perp} = vect\,(a)$ car $E$ est de dimension finie).
Soit $p$ la projection orthogonale sur $F$. On a $u = p(u) + q(u)$ avec $p(u) \in F$ et $q(u) \in F^{\perp}$ donc $q(u)$ est le projeté orthogonal de $u$ sur $F^{\perp}$.
On a donc $p = id - q$.
Or si $a_1 = \dfrac{1}{\|a\|}a$, alors $(a_1)$ est une BON de $F^{\perp}$ donc $q(u) = (u|a_1)\,a_1 = \dfrac{1}{11}(u|a)\,a$.

$Q = \dfrac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = I_3 - Q$

**Exercice 9** *On considère $E = \mathbb{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$.*
*On pose, pour $x \in [0, 1]$, $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$ et $F = vect\,(u_0, u_1)$.*

1. *Déterminer le projeté orthogonal de $v$ sur $F$.*

2. *En déduire la borne inférieure de* $\left\{\sqrt{\int_0^1 (a+bx-\sqrt{x})^2\,dx},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

**Solution de l'exercice:** Soit $p$ la projection orthogonale sur $F$.

1. On a $p(v)\in F$ donc $p(v)=au_0+bu_1$.
   On a $v=p(v)+w$ avec $p(v)\in F$ et $w=v-p(v)\in F^{\perp}$ et $F=vect(u_0,u_1)$ donc $(S):\left\{\begin{array}{l}(v-p(v)\,|u_0)=0\\(v-p(v)\,|u_1)=0\end{array}\right.$

   $(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(v|u_0)-a(u_0|u_0)-b(u_1|u_0)=0\\(v|u_1)-a(u_0|u_1)-b(u_1|u_1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a+\frac{1}{2}b=\frac{2}{3}\\\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b=\frac{2}{5}\end{array}\right.$ de solution $(a,b)=\left(\frac{4}{15},\frac{4}{5}\right)$.

2. On a $\sqrt{\int_0^1 (a+bx-\sqrt{x})^2\,dx}=\|(au_0+bu_1)-v\|=\|f-v\|$ avec $f=au_0+bu_1$.
   Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ est queconque, $f$ est un élément quelconque de $F$ et d'après le cours, la fonction $\left\{\begin{array}{c}F\rightharpoonup\mathbb{R}\\f\mapsto\|f-v\|\end{array}\right.$ admet un minimum atteint en $f=p(v)$.
   On a donc $\inf\left\{\sqrt{\int_0^1 (a+bx-\sqrt{x})^2\,dx},(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=\|p(v)-v\|=\sqrt{\frac{1}{450}}=\frac{\sqrt{2}}{30}$. (calcul non détaillé).

**Exercice 10** *Soit $E$ un espace euclidien et $p$ et $q$ des projecteurs orthogonaux de $E$. On pose $f=p\circ q\circ p$*

1. *Montrer qu'une projection orthogonale de $E$ est un endomorphisme autoadjoint (cours) positif.*
2. *Montrer que $\forall x\in E$, $\|p(x)\|\leq\|x\|$ (cours).*
3. *Montrer que $f$ est un endomorphisme autoadjoint.*
4. *Montrer que $sp(f)\subset[0,1]$.*
5. *Montrer que* $\operatorname{Im}(p)$ *est stable par $f$.*
6. *Soit $u$ l'endomorphisme induit par $f$ sur* $\operatorname{Im}(p)$. *Justifier que* $\operatorname{Im}(p)$ *admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de $u$ qui sont aussi vecteurs propres de $p\circ q$.*
7. *Soit $F=\operatorname{Im}(p)+\ker(q)$.*
   (a) *Soit $A$ et $B$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $(A+B)^{\perp}=A^{\perp}\cap B^{\perp}$.*
   (b) *Montrer que $F^{\perp}=\ker(p)\cap\operatorname{Im}(q)$.*
   (c) *En déduire que $p\circ q$ est diagonalisable et $sp(p\circ q)\subset[0,1]$.*
   *(On pourra utiliser la version suivante du théorème de la base incomplète:*
   *Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $E$, espace vectoriel de dimension finie, on peut compléter une famille libre de $E$ en une base en y adjoignant des vecteurs de $\mathcal{G}$.)*
8. *Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormée de $E$.*
   (a) *Justifier que $tr(p\circ q)=\sum_{i=1}^{n}(p\circ q(e_i)\,|e_i)$.*
   (b) *En déduire que $tr(p\circ q)\leq\min(rg(p),rg(q))$.*

**Solution de l'exercice:** Soit $E$ un espace euclidien et $p$ et $q$ des projecteurs orthogonaux de $E$. On pose $f=p\circ q\circ p$.

1. Si $p$ projection orthogonale sur $F$ et $x\in F$ posons $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in F$ et $x_2\in F^{\perp}$ et $x=y_1+y_2$ avec $y_1\in F$ et $y_2\in F^{\perp}$.
   On $(p(x)\,|y)=(x_1|y_1+y_2)=(x_1|y_1)+(x_1|y_2)=(x_1|y_1)=(x|p(y))$ (en faisant la même chose dans ce dernier produit scalaire) donc $p$ est autoadjoint.
   De même $(p(x)\,|x)=(x_1|x_1)\geq 0$ donc $p$ est autoadjoint positif.

2. Si $p$ projection orthogonale sur $F$ et $x\in F$ posons $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in F$ et $x_2\in F^{\perp}$.
   $\|p(x)\|^2=\|x_1\|^2\leq\|x_1\|^2+\|x_2\|^2=\|x\|^2$ (th de pythagore).

3. $(f(x)\,|y)=(p(q\circ p(x))\,|y)\underset{p\text{ autoadjoint}}{=}(q\circ p(x)\,|p(y))$
   $\underset{q\text{ autoadjoint}}{=}(p(x)\,|q\circ p(y))\underset{p\text{ autoadjoint}}{=}(x|p\circ q\circ p(y))$ donc $f$ est autoadjoint.

4. $\|f(x)\| = \|p(q \circ p(x))\| \leq \|q \circ p(x)\| \leq \|p(x)\| \leq \|x\|$ car $p$ et $q$ sont des projecteurs orthogonaux (Q2).
Si $x$ vecteur propre associé à $\lambda$, alors $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \leq \|x\|$ et $x \neq 0_E$ donc $|\lambda| \leq 1$.
De plus, $f$ est autoadjoint positif donc $sp(f) \subset \mathbb{R}_+$ donc $sp(f) \subset [0,1]$.

5. Si $x \in \operatorname{Im}(p)$, $f(x) = p(q \circ p(x)) \in \operatorname{Im}(p)$ donc $\operatorname{Im}(p)$ est stable par $p$.

6. L'endomorphisme $f_{\operatorname{Im}(p)}$ induit par $f$ sur $\operatorname{Im}(p)$ est aussi autoadjoint: $\forall (x,y) \in \operatorname{Im}(p)^2$, $(f(x)|y) = (x|f(y))$ (égalité vraie pour $(x,y) \in E^2$) donc $f_{\operatorname{Im}(p)}$ est diagonalisable en base orthonormée: Il existe une base orthonormée de $\operatorname{Im}(p)$ formée de vecteur propres de $f$.
Si $x \in \operatorname{Im}(p)$ est vecteur propre de $f$, $\begin{cases} \exists t \in E \text{ tel que } x = p(t) \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda x \end{cases}$. On a $f(x) = p \circ q \circ p(p(t)) = p \circ q \circ p(t)$ car $p^2 = p$ donc a $f(x) = p \circ q(x) = \lambda x$ donc $x$ est vecteur propre de $p \circ q$.

7. Soit $F = \operatorname{Im}(p) + \ker(q)$.

   **a** Soit $A \subset (A+B)$ donc $(A+B)^{\perp} \subset A^{\perp}$. De même $(A+B)^{\perp} \subset B^{\perp}$ donc $(A+B)^{\perp} \subset A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
   Réciproquement, supposons $x \in A^{\perp} \cap B^{\perp}$ et $y \in A+B$, $y = a+b$, $(a,b) \in A \times B$ On a $(x|y) = (x|a) + (x|b) = 0 + 0 = 0$ car $x \in A^{\perp}$ et $a \in A$ et $x \in B^{\perp}$ et $b \in B$ donc $x \in (A+B)^{\perp}$.

   **b** On en déduit que $F^{\perp} = (\operatorname{Im}(p))^{\perp} \cap \ker(q)^{\perp} = \ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ car $p$ est un projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p) = \operatorname{Im}(p)^{\perp}$ (et idem pour $q$).

   **c** Commençons par remarquer que
   - si $x \in \ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)$ avec $x = q(t)$, alors $p \circ q(x) = p \circ q(q(t)) = p \circ q(t) = p(x) = 0$ car $q^2 = q$ et $x \in \ker(p)$. On a donc $\ker(p) \cap \operatorname{Im}(q) \subset \ker(p \circ q)$.
   - $\ker(q) \subset \ker(p \circ q)$.
   Soit $b_1$ une base de $\ker(q)$.
   Soit $b_2$ une base de $\operatorname{Im}(p)$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$ (possible d'après la question précédente).
   La famille $b_3 = (b_1, b_2)$ est une famille génératrice de $F$.
   On peut compléter la famille libre $b_1$ en une base $b_3$ de $F$ à l'aide de vecteurs de $b_2$.
   Soit $b_4$ une base de $F^{\perp}$.
   La famille $(b_3, b_4)$ est une base de $E = F \oplus F^{\perp}$ dont les vecteurs sont des vecteurs propres de $p \circ q$ d'après les questions précédentes.

8. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$.

   **a** Si $M = mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(p \circ q)$ alors $m_{i,j} = (p \circ q(e_i)|e_j)$. On en déduit que $tr(p \circ q) = \sum_{i=1}^{n} (p \circ q(e_i)|e_i)$.

   **b** Soit $b_1'$ une base orthonormée de $\ker(q)$. On complète cette base en une base orthonormée $(b_1', b_2')$ de $F$.
   Soit $b_3'$ une base orthonormée de $F^{\perp}$.
   On a $(b_1', b_2', b_3')$ est une base orthonormée de $E = F \oplus F^{\perp}$.
   En appliquant la question précédente $(b_1', b_2', b_3') = (e_1, \ldots, e_n)$, on a
   $tr(p \circ q) = \sum_{i=1}^{n} (p \circ q(e_i)|e_i) = \sum_{e_i \in b_2'} (p \circ q(e_i)|e_i)$ car $p \circ q(e_i) = 0$ si $e_i \notin b_2'$ (déjà vu).
   On en déduit que $|tr(p \circ q)| \leq \sum_{e_i \in b_2'} |(p \circ q(e_i)|e_i)|$ et $|(p \circ q(e_i)|e_i)| \leq \|p \circ q(e_i)\| \|e_i\| \leq 1$ car $\|p \circ q(e_i)\| \leq \|q(e_i)\| \leq \|e_i\| = 1$. Or le nombre d'éléments $n_2$ de $b_2'$ est inférieur à $\dim(\operatorname{Im}(p))$ car $\dim(\ker(q)) + \dim(\operatorname{Im}(p)) \geq \dim(F) = \dim(\ker(q)) + n_2$.
   On en déduit que $|tr(p \circ q)| \leq n_2 \leq rg(p)$.
   On a $tr(p \circ q) = tr(q \circ p)$ donc $|tr(p \circ q)| \leq rg(q)$.

# III Analyse

**Exercice 11** *1. Etudier le rayon de convergence de* $\sum n^3 x^n$.

*2. Justifier que* $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$ *et décomposer* $X^3$ *dans cette base.*

*3. Calculer la somme de la série entière* $\sum n^3 x^n$.

**Solution de l'exercice:**

1. D'après le cours $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence donc $\sum x^n$ et $\sum n^3 x^n$ ont même rayon de convergence $R = 1$.

2. La famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ échelonnée et de $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$ donc est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ donc
Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $X^3 = b + bX + cX(X-1) + dX(X-1)(X-2)$.
En évaluant en 0, on obtient $a = 0$ puis en évaluant en 1, on obtient $b = 1$.
En évaluant en 2, on obtient $c = 3 = 0$
En identifiant les termes de degré 3, on a $d = 1$.
En posant $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}, \\ f'''(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \end{aligned}$$

on a $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et en écrivant $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$,
on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 3n(n-1)x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$.
Or $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n = x^3 \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = x^3 f'''(x)$ donc
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n = x^3 f'''(x) + 3x^2 f''(x) + f'(x)$ (on peut donner une expressiion $\dfrac{ex^3 + fx^2 + gx + d}{(1-x)^4}$)

**Exercice 12** *Justifier que* $x \mapsto \arcsin(x)$ *est développable en série entière sur* $]-1, 1[$ *et préciser ce développement.*

***Solution de l'exercice:*** *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{c} [-1,1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \arcsin(x) \end{array} \right.$ *est continue sur* $[-1, 1]$ *et dérivable sur* $]-1, 1[$ *et*
$\forall x \in ]-1, 1[,\ f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.
*En utilisant le DSE de* $(1+u)^\alpha$ *(de rayon de CV* $R = 1$*) avec* $\alpha = -\dfrac{1}{2}$*, on obtient*
$\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{-3}{2}\right)\cdots\left(\dfrac{-2n+1}{2}\right)u^n$ *(on n'est pas obligé de séparer la puissance* 0 *avec la convention "produit vide vaut* 1*"*
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n}\right)(-1)^n x^{2n}$*.donc par intégration terme à terme sur* $]-R, R[$ *on a*
$\arcsin(x) = \arcsin(0) + x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n}\right)\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *or*
$1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ *donc*
$\arcsin(x) = x + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}\right)\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} - \left(\dfrac{(2n)!}{2^n \times n!}\right)\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *(on réintègre' la puissance* 1 *dans la somme).*

**Exercice 13** *Montrer que la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2} \end{array} \right.$ *admet un prolongement de classe* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

**Solution de l'exercice:**
En utilisant le DSE de fonctions exp, sin et cos, on obtient un DSE $e^x - \cos(x) - \sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ valable sur $\mathbb{R}$.

On a $a_0 = 1 - 1 - 0 = 0$ et $a_1 = 1 - 0 - 1 = 0$ donc $e^x - \cos(x) - \sin(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$

donc $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n$.

Or la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^n$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec $f$ sur $\mathbb{R}^*$.

C'est donc un prolongement de classe $C^\infty$ de $f$ dont la valeur en 0 est $a_{n+2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{-1}{2} = 1$.
Remarque: Il n'y a pas de difficulté à obtenir la valeur des $a_{n+2}$ mais cela n'est pas nécessaire pour répondre à la question.

**Exercice 14** *On considère l'équation différentielles suivante:* $(\mathcal{E}) : x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$

1. Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ développables en séries entières
2. On pose $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ et, pour $x \in ]0,1[$, on pose $y(x) = f(x)z(x)$.

   **a** Montrer que $y$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall x \in ]0,1[$, $x(1-x)z''(x) - (x-2)z'(x) = 0$.

   **b** En déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,1[$. (on pourra admettre que $\forall x \in ]0,1[$ $\frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}$).

   **c** La fonction $x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{(1-x^2)}$ admet-elle un prolongement de classe $C^1$ sur $[0,1[$?

   **d** Montrer qu'il n'existe pas de solutions de $(\mathcal{E})$ sur $[0,1]$.

**Solution de l'exercice:**

1. On pose $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. (et on suppose que la série entière est de rayon $R > 0$).
   La fonction $y$ vérifie $(\mathcal{E})$ sur $]-R,R[$ si et seulement si

$$\forall x \in ]-R,R[\,,\ \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n\geq 1} na_n x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0.$$

   Soit ( changement d'indice dans la deuxième somme):

$$\forall x \in ]-R,R[\,,\ \sum_{n=2\to 0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1\to 0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 3\sum_{n=1\to 0}^{+\infty} na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

   Soit .

$$\forall x \in ]-R,R[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(n^2+2n+1\right)a_n - n(n+1)a_{n+1}\right)x^n = 0$$

   Par unicité du DSE, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$ ce qui donne $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n.$$

   Ainsi, par récurrence, on trouve $a_n = na_1$.
   La série entière $\sum nx^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$ donc $R = 1$ on a prouvé que la fonction.

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

   est solution de l'équation sur $]-1,1[$

2. On pose $y(x) = f(x)z(x)$ c'est-à-dire $z(x) = \dfrac{y(x)}{f(x)}$

   **a** On se place sur l'intervalle $]0,1[$.
   Sachant que $f$ est solution de l'équation, on trouve que $y$ est aussi solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\forall x \in ]0,1[\,,\ 2x(x-1)f'(x)z'(x) + x(x-1)f(x)z''(x) + 3xf(x)z'(x) = 0$$

$$\forall x \in ]0,1[\,,\ z'(x)(x-2) = x(1-x)z''(x).$$

   soit

$$x(1-x)z''(x) - \frac{(x-2)}{x(1-x)}z'(x) = 0.$$

   **b** On a donc $y$ est aussi solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\forall x \in ]0,1[\,,\ z''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}\right)z'(x) = 0$$

   Or $x \mapsto \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ admet $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$ donc $y$ est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in ]0,1[\,,\ z'(x) = \lambda\frac{1-x}{x^2} = \lambda\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right).$$

soit (quitte à changer $\lambda$ en $-\lambda$) :

$$\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists\mu\in\mathbb{R},\ \forall x\in\left]0,1\right[,\forall x\in\left]0,1\right[,z\left(x\right)=\lambda\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)+\mu.$$

Les solutions de l'équation sur $]0,1[$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto\frac{\mu x+\lambda(1+x\ln x)}{(1-x)^2}.$$

Remarque: l'ensemble des solutions sur $]0,1[$ est bien un espace vectoriel de dimension 2.

**c** Posons $u\left(x\right)=\dfrac{x\ln x}{(1-x)^2}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0}u\left(x\right)=0$ et $\dfrac{u\left(x\right)-u\left(0\right)}{x-0}=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}\underset{x\to0}{\to}-\infty$ donc le prolongement par cpontinuité de $u$ en 0 n'est pas dérivable en 0.

**d** Or $x\mapsto\dfrac{\mu x+\lambda}{(1-x)^2}$ est dérivable en 0 donc si $\lambda\neq0$ alors $x\mapsto\dfrac{\mu x+\lambda}{(1-x)^2}+\lambda\dfrac{x\ln x}{(1-x)^2}$ n'admet pas de prolongement en 0 dérivable en 0..(dérivable + non dérivable $\Longrightarrow$ non dérivable)

On en déduit que si $y$ a un prolongement dérivable en 0 alors $\lambda=0$ et $y\left(x\right)=\dfrac{\mu x}{(1-x)^2}$.

Or si $\mu\neq0$ alors $x\mapsto\dfrac{\mu x}{(1-x)^2}$ a une limite infinie en 1 donc $y$ admet un prolongement de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ ssi $\lambda=\mu=0$.

La fonction nulle est solution sur $[0,1]$ (équation homogène) et c'est donc la seule solution sur $[0,1]$.