

Révisions (1 avril) probabilités

Exercice 1 (ccinp 2025)

On considère un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

On note $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ la fonction génératrice de X .

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson.

1. Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P(|X - \lambda| \geq \lambda)$.
3. Justifier que l'événement $\{X \geq 2\lambda\}$ est inclus dans l'événement $\{|X - \lambda| \geq \lambda\}$.
4. En déduire la majoration suivante : $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
5. Donner l'ensemble de définition de G_X .
6. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
7. On suppose que $t \geq 1$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

8. En déduire que :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$$

9. On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$. Quelle majoration (1) ou (2) de $P(X \geq 2\lambda)$ est la plus précise?

Problème: Loi binomiale négative

On lance indéfiniment une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir "Pile" est $p \in]0, 1 [$ et celle d'obtenir "Face" est $q = 1 - p$.

Pour $r \in \mathbb{N}^*$ donné, on note X le rang d'apparition du r -ième "Pile" et Y le nombre de "Face" obtenus avant l'obtention du r -ième "Pile".

Q 1 que peut-on dire de $X(\Omega)$? Quel sens donner à $(X = +\infty)$?

Q 2 Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq r$.

a Donner la loi de la variable aléatoire T comptant le nombre de "Piles" au cours des $(k - 1)$ premiers lancers.

b Exprimer l'évènement $(X = k)$ à l'aide de la variable T et d'un évènement simple.

En déduire que $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$.

Q 3 Justifier que si x est un réel tel que $|x| < 1$, alors $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$

Q 4 a Justifier que $X(\Omega) = [r, +\infty[$.

b Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Q 5 Loi de Y :

a Déterminer la loi de Y .

On dit que Y suit la loi binomiale négative de paramètres r et p , notée $\mathcal{BN}(r, p)$.

b Montrer que Y admet une espérance l'on calculera.

Q 6 On suppose que Y suit la loi $\mathcal{BN}(2, p)$. Soit $Z = \frac{1}{Y+2}$.

Prouver l'existence de l'espérance de Z et calculer sa valeur.

Désormais X désigne une variable aléatoire quelconque définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) à valeur dans \mathbb{N} .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note : $p_k = P(X = k)$.

On dit que X appartient à \mathcal{E} , si X vérifie la propriété suivante notée (\mathcal{P}) :

$$\exists a \in]-\infty, 1[, \exists b \in \mathbb{R}_+, \begin{cases} a = 0 \text{ ou } \frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} \end{cases}$$

Q 7

a Quelles sont les variables aléatoires qui vérifient (\mathcal{P}) lorsque $a = 0$?

b Vérifier que toute variable aléatoire suivant une loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r, p)$ appartient à \mathcal{E} . Que valent alors a et b ?

c Même question pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$?

d On suppose que $X \in \mathcal{E}$ admet une espérance. Exprimer $E(X)$ en fonction de a et b .

On vérifiera que le résultat obtenu est cohérent avec les espérances des variables aléatoires des questions a), b) et c).

Q 8 Dans cette question, on suppose que X vérifie (\mathcal{P}) avec $a \neq 0$.

a Montrer que: $\exists c \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k = p_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (c + i)$.

b Déterminer la loi de X si $a < 0$.

c Déterminer la loi de X si $a \in]0, 1[$.

Q 9 Déterminer les lois des variables aléatoires appartenant à \mathcal{E} .

CORRECTION

Solution de l'exercice:

1. Puisque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X valent λ .

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (possible car X est de variance finie)

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) = P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \geq 2\lambda$ alors $X(\omega) - \lambda \geq \lambda$ Or $\lambda > 0$, donc $X(\omega) - \lambda > 0$. donc $|X(\omega) - \lambda| \geq \lambda$.

L'événement $(X \geq 2\lambda)$ est inclus dans l'événement $(|X - \lambda| \geq \lambda)$.

4. On a donc $P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda)$. D'où d'après Q2 :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

5. Pour tout réel t , la série $\sum e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ est convergente absolument, (série exponentielle).

L'ensemble de définition de G_X est \mathbb{R} .

6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda t - \lambda} = e^{\lambda(t-1)}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

7. Soient $t \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours: $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = E(t^X)$ (résultat de cours obtenu par la formule du transfert (car la série $\sum P(X = n)t^n$ est absolument convergente donc la famille $(P(X = n)t^n)$ est sommable).

Or $t \geq 1$ donc $Y = t^X \geq 0$ (et d'espérance finie d'après ce qui précède) On peut appliquer l'inégalité de Markov à Y :

$$P(Y \geq t^\alpha) \leq \frac{E(Y)}{t^\alpha} = \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

Or $X(\omega) \geq \alpha \Leftrightarrow t^{X(\omega)} \geq t^\alpha$ car $x \mapsto t^x = e^{x \ln(t)}$ est croissante donc $(X \geq \alpha) = (Y \geq t^\alpha)$

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

Autre méthode (plus long): on adapte la démonstration de l'inégalité de Markov

Notons n_0 le plus petit entier naturel supérieur à α . On a :

$$P(X \geq \alpha) = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n).$$

Donc $P(X \geq \alpha)t^\alpha = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^\alpha$. Or, puisque $t \geq 1$, on a pour $n \geq n_0 \geq \alpha$, $t^\alpha \leq t^n$ d'où :

$$P(X \geq \alpha)t^\alpha \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^n$$

En ajoutant des termes positifs, on majore $\sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^n$ par $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)t^n$ qui est $G_X(t)$.

D'où, en divisant par $t^\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

8. Avec $\alpha = 2\lambda$, on obtient $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}$.

Cela étant vrai pour tout $t \geq 1$, on a avec $t = 2$:

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^\lambda}{4^\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$$

9. Puisque $\lambda > 0$, on a par stricte croissance du logarithme népérien :

$$\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \iff -\ln(\lambda) \geq \lambda \ln\left(\frac{e}{4}\right) \iff \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \ln(4) - 1.$$

L'étude de $\Psi : \lambda \mapsto \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$ sur \mathbb{R}_+^* montre que Ψ admet un maximum atteint en e valant $\frac{1}{e}$.
On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$, donc

$$\forall \lambda > 0, \quad \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{\ln(4) - 1}{1,05} \leq \ln(4) - 1$$

On a donc pour tout $\lambda > 0$, $\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \leq \frac{1}{\lambda}$:

La majoration (2) de $P(X \geq 2\lambda)$ est la plus précise que la majoration (1).

Solution du problème:

R 1 On a clairement $X(\Omega) \subset [r, +\infty[\cup \{+\infty\}$. si on considère que $X = +\infty$ si et seulement si on n'obtient pas r fois pile

R 2 (a) Si "obtenir pile au $i^{\text{ème}}$ lancer" est considéré comme un succès, T compte le nombre de succès au cours de $k - 1$ expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p , on a donc $T \sim \mathcal{B}(k - 1, p)$.

(b) Pour tout $k \geq r$, l'évènement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si, au cours des $(k - 1)$ premiers lancers, on a obtenu $(r - 1)$ piles et on a obtenu le r -ième pile lors du k -ième lancer. Donc, si on note A_k l'évènement "le k -ième lancer donne pile", on a :

$$P(X = k) = P((T = r - 1) \cap A_k) = P(T = r - 1)P(A_k) \quad \text{car les lancers sont indépendants} = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} q^{k-r} \times p$$

R 3 En utilisant la dérivée $q^{\text{ième}}$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{q!} \sum_{k=q}^{+\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) q^{k-r} = \frac{1}{q!} \frac{q!}{(1-x)^{r+1}} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \quad (\text{égalité vraie pour } x \in]-1, 1[).$$

R 4 Montrons que $P(X = +\infty) = 0$.

$$\text{On a } P(X < +\infty) = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = \sum_{k=r-1}^{+\infty} \binom{k}{r-1} p^r q^{k-(r-1)} = \frac{p^r}{(1-q)^r} = 1.$$

R 5 Comme X est positive, on peut écrire (sous réserve de sommabilité):

$$E(X) = \sum_{k=r}^{+\infty} k \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = r p^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{r p^r}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p^{-r}},$$

Donc X est d'espérance finie.

R 6 (a) On voit que $Y = X - r$. D'où, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y = k) = P(X = k + r) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k.$$

(b) Par linéarité de l'espérance on a : $E(Y) = E(X - r) = E(X) - r = \frac{r q}{p}$.

R 7 D'après la formule de transfert pour l'espérance, comme Z est positive, (sous réserve de sommabilité):

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k+2} p^2 q^k \quad \text{d'après Q5a avec } r = 2 \\ &= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k+2}}{k+2} = p^2 \frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2} \left(-q + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} \right) \\ &= p + \frac{p^2}{q^2} \ln(p) + \frac{p^2}{q} = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} \ln(p) \quad \text{d'après le DSE usuel de } \ln(1+x) \end{aligned}$$

Donc Z est bien d'espérance finie.

R 8 (a) Si $a = 0$ alors $p_k = \frac{b^k}{k!} p_0$ (par récurrence).

Comme $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un SCE, on a donc : $1 = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 e^b$.

D'où $p_0 = e^{-b}$. Et ainsi $X \sim \mathcal{P}(b)$. Et l'on vérifie facilement la réciproque.

(b) Si $X \sim \mathcal{BN}(r, p)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{r+k-1}{k} q = \left(1 + \frac{r-1}{k}\right) q$ donc $a = q$ et $b = (r-1)q$ conviennent, avec $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$.

(c) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors, pour $1 \leq k \leq n$,

$$p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow \frac{p_k}{p_{k-1}} \stackrel{\text{Q5a}}{=} \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{q} = \left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) \frac{p}{q}$$

d'où $a = -\frac{p}{q}$ et $b = -(n+1)a$, avec $\frac{b}{a} = -(n+1) \in \mathbb{Z}$, qui conviennent.

On a alors bien $p_{n+1} = 0$, donc $p_k = 0$ pour tout $k \geq n+1$.

(d) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $kp_k = (ak + b)p_{k-1} = a(k-1)p_{k-1} + ap_{k-1} + bp_{k-1}$.

Donc en sommant de $k = 1$ à ∞ , $\sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} = 1$ et puisqu'on peut ajouter le terme $0p_0 = 0$ au membre de gauche

on a : $E(X) = aE(X) + a + b$, soit $E(X) = \frac{a+b}{1-a}$. En particulier on retrouve bien :

- $X \sim \mathcal{P}(b) \iff a = 0 \implies E(X) = b$;
- $X \sim \mathcal{BN}(r, p) \iff (a, b) = (q, (r-1)q) \implies E(X) = \frac{q(1+(r-1))}{1-q} = \frac{rq}{p}$ (cf. Q4).
- $X \sim \mathcal{B}(n, p) \iff (a, b) = \left(-\frac{p}{q}, (n+1)\frac{p}{q}\right) \implies E(X) = \frac{\frac{p}{q}(-1+(n+1))}{1+\frac{p}{q}} = np$.

R 9 (a) Pour $k = 1$ on a $p_1 = (a+b)p_0 = p_0$ donne nécessairement $c = 1 + \frac{b}{a}$.

Réciproquement on vérifie que cette valeur convient pour tout k , par récurrence sur $k \geq 1$.

(b) Si $a < 0$ et $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$, on pose $n = -\frac{b}{a} - 1 \in \mathbb{N}$, d'où

$$p_k = p_0 \frac{a^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (-n+i) \Rightarrow p_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ p_0 \binom{n}{k} (-a)^k & \text{si } k \in \{0, n\} \end{cases}$$

Puis avec $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, on obtient $p_0 = \frac{1}{(1-a)^n}$, donc $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{-a}{1-a}\right)$.

(c) De même, si $a \in]0, 1[$, on pose $n = 1 + \frac{b}{a} \in \mathbb{N}$, puis : $\forall k, p_k = p_0 \binom{n+k-1}{k} a^k$, avec $p_0 = (1-a)^n$, donc $X \sim \mathcal{BN}(n, 1-a)$.

Q8. D'après Q7 et Q6a (analyse pour respectivement les cas $a \neq 0$ et $a = 0$) et Q6a, b, c (synthèse), les lois des $X \in \mathcal{E}$ sont les lois binomiales, binomiales négatives ou de Poisson.

Indications

Q1. Faire une remarque sur le nombre de lancers nécessaires. Est-il possible de ne jamais avoir r fois pile?.

Q2. (a) Reconnaître une loi usuelle et le justifier précisément.

(b) Expression de $(X = k)$: d'après la modélisation en terme de résultats de lancers. Puis calcul de probabilité en utilisant le (a).

Q3 DSE de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Q4.a et b Utiliser Q2b et Q3

Q5 Exprimer Y comme une fonction de X .

(b) Par linéarité de l'espérance avec le résultat de Q3.

Q5. Par théorème de transfert puisque Q5. a donne la loi de Y .

Q6. (a) Calcul du terme général d'une suite récurrence simple usuelle (produit).

Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer la somme des p_k .

Reconnaître une loi usuelle.

(b) Calcul

(c) Calcul

(d) Définition de $E(X)$.

Espérances des lois usuelles à connaître.

Q7. (a) Analyse-synthèse : calcul de c à l'aide du cas particulier $k = 1$.

Puis on vérifie par récurrence que cela convient.

(b) Lois usuelles ou \mathcal{BN}

(c) Lois usuelles ou \mathcal{BN}

Q8. Synthèse des résultats du problème.

Mathématiques

Sujet de révision pour les écrits à€" corrigé

Solution de l'exercice

Solution de l'exercice:

1. Puisque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X valent λ .

2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (possible car X est de variance finie)

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) = P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \geq 2\lambda$ alors $X(\omega) - \lambda \geq \lambda$ Or $\lambda > 0$, donc $X(\omega) - \lambda > 0$. donc $|X(\omega) - \lambda| \geq \lambda$.

L'événement $(X \geq 2\lambda)$ est inclus dans l'événement $(|X - \lambda| \geq \lambda)$.

4. On a donc $P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda)$. D'où d'après Q2 :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

5. Pour tout réel t , la série $\sum e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ est converge absolument, (série exponentielle).

L'ensemble de définition de G_X est \mathbb{R} .

6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda t - \lambda} = e^{\lambda(t-1)}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

7. Soient $t \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours: $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = E(t^X)$ (résultat de cours obtenu par la formule du transfert (car la série $\sum P(X = n)t^n$ est absolument convergente donc la famille $(P(X = n)t^n)$ est sommable).

Or $t \geq 1$ donc $Y = t^X \geq 0$ (et d'espérance finie d'après ce qui précède) On peut appliquer l'inégalité de Markov à Y :

$$P(Y \geq t^\alpha) \leq \frac{E(Y)}{t^\alpha} = \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

Or $X(\omega) \geq \alpha \Leftrightarrow t^{X(\omega)} \geq t^\alpha$ car $x \mapsto t^x = e^{x \ln(t)}$ est croissante donc $(X \geq \alpha) = (Y \geq t^\alpha)$

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

Autre méthode (plus long): on adapte la démonstration de l'inégalité de Markov

Notons n_0 le plus petit entier naturel supérieur à α . On a :

$$P(X \geq \alpha) = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n).$$

Donc $P(X \geq \alpha)t^\alpha = \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^\alpha$. Or, puisque $t \geq 1$, on a pour $n \geq n_0 \geq \alpha$, $t^\alpha \leq t^n$ d'où :

$$P(X \geq \alpha)t^\alpha \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^n$$

En ajoutant des termes positifs, on majore $\sum_{n=n_0}^{\infty} P(X = n)t^n$ par $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n)t^n$ qui est $G_X(t)$.

D'où, en divisant par $t^\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}$$

8. Avec $\alpha = 2\lambda$, on obtient $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}$.

Cela étant vrai pour tout $t \geq 1$, on a avec $t = 2$:

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^\lambda}{4^\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$$

9. Puisque $\lambda > 0$, on a par stricte croissance du logarithme népérien :

$$\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \iff -\ln(\lambda) \geq \lambda \ln\left(\frac{e}{4}\right) \iff \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \ln(4) - 1.$$

L'étude de $\Psi : \lambda \mapsto \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$ sur \mathbb{R}_+^* montre que Ψ admet un maximum atteint en e valant $\frac{1}{e}$.

On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$, donc

$$\forall \lambda > 0, \quad \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{\ln(4) - 1}{1,05} \leq \ln(4) - 1$$

On a donc pour tout $\lambda > 0$, $\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \leq \frac{1}{\lambda}$:

La majoration (2) de $P(X \geq 2\lambda)$ est la plus précise que la majoration (1).