Révisions (3 avril)

équas diffs, probas

I équations différentielles

Exercice 1 *Soit I un intrervalle a et b des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$*
Soit $(\mathcal{E}) : y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y = 0$.

1. *Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.*
   Montrer que $\exists t_0 \in I, f(t_0) = f((t_0) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I, f(t) = 0$.

2. *Soit f et g deux solutions non indentiquement nulles de $(\mathcal{E})$ et $W : t \mapsto W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$.*
   On suppose qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$.
   Montrer qu'il existe λ tel que $g = \lambda f$.
   En déduire que $\forall t \in I, W(t) = 0$.

Problème

Si $k \geqslant 1$ est un entier et si $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. .
Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue, périodique de période $T > 0$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0 : (\mathcal{E})$$

dont on se propose de donner des propriétés des solutions à valeur complexes.

Remarque *Même si on a peu vu cette situation, les théorèmes du cours sont valables pour les équations différentielles $y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)$ avec des coefficients a, b, c fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$ et une fonction inconnue $y : I \rightharpoonup \mathbb{C}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$.*

Q 1 *(a) Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de l'équation $(\mathcal{E})$ telles que :*

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Préciser l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On note E l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Q 2 *On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$.*

(a) Justifier que W est dérivable de dérivée $t \mapsto W'(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix}$

(b) En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = 1.$$

Q 3 *Montrer que si $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de $(\mathcal{E})$, alors la fonction $z : t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi.*
En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t+T) = y(T)y_1(t) + y'(T)y_2(t).$$

Q 4 *Soit φ l'application définie par* $\varphi : \left\{ \begin{array}{l} E \rightharpoonup E \\ y \mapsto z \text{ défiinie par } \forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(t+T) \end{array} \right.$.
Justifier que φ est linéaire et donner une expression de son polynôme caractéristique faisant intervenir $y_1(T)$ et $y_2'(T)$.

Q 5 *Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.*
(i) L'équation $(\mathcal{E})$ possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle qui vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu y(t).$$

(ii) Le nombre complexe μ est solution de l'équation d'inconnue x :

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\, x + 1 = 0.$$

(iii) L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ possède une solution $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non nulle telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

où $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction T-périodique.

Q 6 *Soient μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation d'inconnue x :*

$$x^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\, x + 1 = 0$$

(a) Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un nombre complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors pour toute solution y de $(\mathcal{E})$, il existe deux fonctions T-périodiques w_1 et w_2, ainsi que deux nombres complexes α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t)$$

(b) Supposons que $\mu_1 = \mu_2$.
Montrer que $\mu_1 \in \{-1, 1\}$ et que l'équation $(\mathcal{E})$ admet une solution périodique non nulle appartenant à.$\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

II Algèbre linéaire

Exercice 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.*

1. *Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, Préciser une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.*
   (on peut prendre $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$)
2. *Calculer P^{-1}. (on otient $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$).*
3. *En déduire que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$ (on pourra introduire la matrice définie par blocs $Q = \left(\begin{array}{c|c} 2I_n & -I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right)$).*
4. *Montrer que si A est diagonalisable alors B est diagonalisable (on pourra $\left(\begin{array}{c|c} P_A & 0 \\ \hline 0 & P_A \end{array}\right)$ où $P_A \in GL_n(R)$ est telle que $P_A^{-1} A P_A$ diagonale).*

5. *Montrer la réciproque (utiliser un théorème sur l'endomorphisme induit ou passer par les polynômes annulateurs).*

6. *Montrer que* $rg(B) = 2rg(A)$. *On suppose que* A *n'est pas inversible. Que peut-on en déduire?*
Dans ce cas, exprimer $E_0(B)$ *à l'aide de* $E_0(A)$. *(utiliser le th du rang deux fois et on obtient* $\dim(E_0(B)) = 2\dim(E_0(A))$*).*
Retrouver ce résultat en résolvant $BX = 0$ *en posant* $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ *avec* $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 *Soit* E *un espace euclidien et* p *et* q *des projecteurs orthogonaux de* E. *On pose* $f = p \circ q \circ p$

1. *Montrer qu'une projection orthogonale de* E *est un endomorphisme autoadjoint (cours) positif.*

2. *Montrer que* $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ *(cours).*

3. *Montrer que* f *est un endomorphisme autoadjoint.*

4. *Montrer que* $sp(f) \subset [0,1]$.

5. *Montrer que* $\operatorname{Im}(p)$ *est stable par* f.

6. *Soit* u *l'endomorphisme induit par* f *sur* $\operatorname{Im}(p)$. *Justifier que* $\operatorname{Im}(p)$ *admet une base orthonormée formée de vecteurs propres de* u *qui sont aussi vecteurs propres de* $p \circ q$.

7. *Soit* $F = \operatorname{Im}(p) + \ker(q)$.

   (a) *Soit* A *et* B *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Montrer que* $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

   (b) *Montrer que* $F^{\perp} = \ker(p) \cap \operatorname{Im}(q)$.

   (c) *En déduire que* $p \circ q$ *est diagonalisable et* $sp(p \circ q) \subset [0,1]$.
   (On pourra utiliser la version suivante du théorème de la base incomplète:
   Si $\mathcal{G}$ *est une famille génératrice de* E, *espace vectoriel de dimension finie, on peut compléter une famille libre de* E *en une base en y adjoignant des vecteurs de* $\mathcal{G}$.*)*

8. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base orthonormée de* E.

   (a) *Justifier que* $tr(p \circ q) = \sum\limits_{i=1}^{n} (p \circ q(e_i) | e_i)$.

   (b) *En déduire que* $tr(p \circ q) \leq \min(rg(p), rg(q))$.

III Probabilités

Exercice 4 *Soit* X *une variable aléatoire à valeur dans* $\mathbb{N}$ *de fonction génératrice* G_X*;*

1. *Retrouver les relations concernant* $G_X(1)$, $G_X'(1)$ *et* $G_X''(1)$ *dans le cas où* $\sum P(X=n)t^n$ *est de rayon de convergence* $R > 1$.

2. *On suppose qu'il existe* $a > 0$ *tel que* $G_X(t) = \dfrac{a}{(1-t)^2}$.

   a *Déterminer* a. *Justifier que* X *est d'espérance finie et donner* $E(X)$

   b *Justifier que* X^2 *est d'espérance finie et donner* $V(X)$.

   c *On pose* $Y = X + 2$. *Exprimer* G_Y *en fonction de* G_X.
   Justifier qu'il existe deux variables aléatoires T_1 *et* T_2 *indépendantes telles que* Y *et* $T_1 + T_2$ *ont même loi.*

d *Retrouver les résultats des questions a et b.*

Exercice 5 *Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

1. *Rappeler la loi faible des grands nombres.*
2. *Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont elles indépendantes?*
3. *Déterminer l'espérance et la variance de M_n.*
4. *Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - 2p| \geq \varepsilon\right) = 0$.*

INDICATIONS

Problème

Q1: (a) Théorème de Cauchy
(b) théorème de structure pour une équation homogène (avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) applicable après avoir justifié (y_1, y_2) libre.
Q2 (a) calcul (on peut utiliser le cours sur la dérivation vectorielle mais ce n'est pas indispensable)
Q3 Puisque z est solution alors z est CL de y_1 et y_2 (Q1b)
Q4 Ecrire la matrice dans la base (y_1, y_2) à l'aide de Q3.
Q5 $(i) \Leftrightarrow (ii)$: interpréter (i) en terme de vecteur propre - valeur propre de φ.
Q6a Utiliser $(ii) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (iii)$
Q6b: On ne dispose que d'un vecteur propre. Donner la valeur de λ permet de conclure en prenant comme période T ou $2T$ suivant la valeur de λ.

CORRECTION

Solution de l'exercice 1:

1. $(\Leftarrow)$ est immédiat.
   $(\Longrightarrow)$ Supposons $\exists t_0 \in I, f(t_0) = f((t_0) = 0$
   La fonction nulle est solution de $(\mathcal{E})$ car l'équation est homogène. Elle vérifie les mêmes conditions de Cauchy en t_0 que la solution f donc ces deux fonction sont égales.

2. $(\Leftarrow)$ est immédiat.
   $(\Longrightarrow)$ Soit f et g deux solutions non indentiquement nulles de $(\mathcal{E})$ et $W : t \mapsto W(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$.
   Supposons $\exists t_0 \in I, W(t_0) = 0$. La famille $\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix} \right)$
   donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix} : (\mathcal{R})$.(car $\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)
   Posons $\varphi = \lambda f$. D'après $(\mathcal{R})$, $g(t_0) = \varphi(t_0)$ et $g'(t_0) = \varphi'(t_0)$
   Comme $(\mathcal{E})$ est homogène et f est solution de $(\mathcal{E})$ alors, $\varphi = \lambda f$ est solution de $(\mathcal{E})$ et φ vérifie les mêmes conditions de Cauchy que g donc $g = \varphi = \lambda f$.
   On en déduit immédiatement que $\forall t \in I$, $W(t) = 0$.

R 1 *(a) Pour a et $b \in \mathbb{C}$, le problème de Cauchy* $\begin{cases} y'' + qy = 0 : (\mathcal{E}) \\ y(0) = a; y'(0) = b \end{cases}$ *admet une unique solution car l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 sous forme résolue (coefficient de y'' égal à 1) et à coefficients (la fonction q) continus sur l'intervalle $\mathbb{R}$.Si y est solution de $(\mathcal{E})$, alors $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ car y est deux fois dérivables, vérifiant $y'' = -qy \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'où l'unicité et*
l'existence de deux solutions de $(\mathcal{E})$: y_1 et $y_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telles que : $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ *et* $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$
De plus, selon le cours l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.
Supposons $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda_1 = 0$ donc $\lambda_2 y_2 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$.
La famille (y_1, y_2) est libre donc base de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ aui est donc égal à vect (y_1, y_2).

R 2 *(a) Première méthode: Développer le déterminant et appliquer les théorèmes sur les opérations sur fonctions dérivables*
(a) Deuxième méthode: le déterminant étant bilinéaire selon les lignes, la fonction W est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = \begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) \end{vmatrix}$$

(b) Or y_i solution de $(\mathcal{E})$ donc $y_i'' = qy_i$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ W'(t) = q(t) \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi W est constante sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}, \quad W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = W(0) = 1$

R 3 *On suppose que $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une solution de $(\mathcal{E})$.*
On note $z : t \mapsto y(t + T)$ de sorte que $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $z'' : t \mapsto y''(t + T)$.
Comme q est T-périodique et y solution de $(\mathcal{E})$, on a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, z''(t) + q(t)z(t) = y''(t + T) + q(t + T)y(t + T) = 0$$

Ainsi la fonction $t \mapsto y(t + T)$ est aussi solution de $(\mathcal{E})$
donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ donc $z' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$
En évaluant en 0 ces deux égalités, on obtient $y(T) = \lambda_1$ et $y(T) = \lambda_2$,
ce qui entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t + T) = y(\ T)y_1(t) + y'(T)y_2(t)$

R 4 *Remarque:* $y \in E$, *on a bien* $\varphi(y) \in E$ *d'après la question précédente donc on peut définir l'application* φ.
L'application φ *est linéaire:*
D'après la question précédente, si $y \in E$ *alors* $\varphi(y) = y(T)y_1 + y'(T)y_2$.
On en déduit que la matrice de φ *dans la base* (y_1, y_2) *est* $\begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$.
Donc $\operatorname{tr}(\varphi) = y_1(T) + y_2'(T)$ *et* $\det(\varphi) = W(T) = 1$ *(d'après Q2) donc*

$$\chi_\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - (y_1(T) + y_2'(T))\,\mathrm{X} + 1$$

R 5 • *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii):.On a*

$$\textit{(i)} \iff \exists y \in E\backslash\{0\}, \varphi(y) = \mu y \iff \mu \in \operatorname{Sp}(\varphi) \iff \chi_\varphi(\mu) = 0 \iff \textit{(ii)}$$

• *(i)* $\Leftrightarrow$ *(iii): Pour* $y \in E$ *on définit l'application* $u : t \longmapsto e^{-\lambda t}y(t)$.
De sorte que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\lambda t}u(t)$. *Comme* $\mu = e^{\lambda T} \neq 0$, *on montre facilement que*

$$u \text{ est une fonction } T\text{-périodique si, et seulement si, } \forall t \in \mathbb{R}, y(t+T) = \mu y(t)$$

Ce qui correspond à (i) $\Leftrightarrow$ *(iii).*

R 6 *On reprend la notation* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ *de 3. et on a* $\chi_\varphi(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \mu_1)(\mathrm{X} - \mu_2)$.
(a) On suppose que $\mu_1 \neq \mu_2$, *alors* $\chi_\varphi(\mathrm{X})$ *est scindé à racines simples donc* φ *est diagonalisable.*
On dispose alors de (v_1, v_2) *base de vecteurs propres de* φ *associés à* (μ_1, μ_2).
On a $\det(\varphi) = \mu_1\mu_2 = 1$.
On a donc $\mu_1 \neq 0$ *donc* $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mu_1 = e^{\lambda T}$ *et* $\mu_2 = \dfrac{1}{\mu_1} = e^{-\lambda T}$*: justifacation non demandé mais aurait pu être justifé comme suit:*
(découle de la surjectivité de $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}^* \\ z \mapsto e^z \end{array}\right.$ *: écrire* $\mu = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho > 0$ *donc* $\mu = e^a e^{i\theta} = e^{\alpha + i\theta}$ *et prendre* $\lambda = \dfrac{\alpha + i\theta}{T}$*)*
On note alors $\lambda_1 = \lambda$ *et* $\lambda_2 = -\lambda$ *de sorte que pour* $i \in \{1, 2\}$, *on a ait* $\mu_i = e^{\lambda_i T}$.
On a $\varphi(v_i) = \mu_i v_i$ *donc en utilisant (i)* $\Leftrightarrow$ *(iii) on dispose alors de* $w_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ T*-périodique telle que* $\forall t \in \mathbb{R}, v_i(t) = e^{\lambda_i t}w_i(\dot{t})$. *D'où*

$$\forall t \in \mathbb{R}, v_1(t) = e^{\lambda t}w_1(t) \text{ et } v_2(t) = e^{-\lambda t}w_1(t)$$

Comme (v_1, v_2) *est génératrice de* E, *il existe deux fonctions* T*-périodiques* w_1 *et* w_2 *telles que pour toute solution* y *de* $(\mathcal{E})$, *on ait :*

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \alpha e^{\lambda t}w_1(t) + \beta e^{-\lambda t}w_2(t)$$

(b) On suppose que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.
On a On a $\det(\varphi) = \mu^2 = 1$.*donc* $\mu \in \{-1, 1\}$.*Par relation coefficients-racines, on a* $\mu^{2\cdot} = \mu_1\mu_2 = 1$ *donc* $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$
On dispose alors de $\lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mu = e^{\lambda T} \in \operatorname{Sp}(\varphi)$ *et* $e^{2\lambda T} = \mu^2 = 1$.
Si $\mu = 1 = e^{0T}$, *en utilisant (i)* $\Leftrightarrow$ *(iii), il existe* $y \in E$ *non nulle et* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})T$*-périodique telles que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{0t}u(t)$$

qui est T*-périodique.*
Si $\mu = 1 = e^{i\pi} = e^{\frac{i\pi}{T}T}$, *en utilisant (i)* $\Leftrightarrow$ *(iii), il existe* $y \in E$ *non nulle et* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})T$*-périodique telles que*$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{\frac{i\pi}{T}t}u(t)$
et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t + 2T) = e^{2\mathrm{i}\pi}e^{\frac{i\pi}{T}t}u(t + 2T) = y(t)$$

donc l'équation $(\mathcal{E})$ *admet une solution périodique non nulle dans* $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Solution de l'exercice 4:

1. On a $G_X(1) = 1$ et par dérivation terme à terme de $\sum P(X=n)t^n$ sur$]-R, R[$, on obtient $G'_X(1) = \sum\limits_{n=1\rightharpoonup 0}^{+\infty} nP(X=n) = E(X)$ et $G''_X(1) = \sum\limits_{n=2\rightharpoonup 0}^{+\infty} \underbrace{n(n-1)}_{f(n)}P(X=n) = E(X(X-1)))$ (th du transfert).

2. $G_X(t) = \dfrac{a}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2}$ donc

   a $G_X(t) = 4a$ donc $a = \dfrac{1}{4}$ et $G'_X(t) = \dfrac{a}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^3}$ donc $G'_X(1) = 8a = 2 = E(X)$.

   b On a $G''_X(t) = \dfrac{\dfrac{3}{2}a}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^4}$ donc $G''_X(1) = 6 = E(X(X-1))$.

   On en déduit que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = 4$.

   c On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ donc $G_Y(t) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(Y=n)t^n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(X=n-2)t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^{n+2} = t^2$
   $G_X(t) = \dfrac{\dfrac{1}{4}t^2}{\left(1-\dfrac{t}{2}\right)^2}$.

   Autre méthode: $G_Y(t) = E\left(t^Y\right) = E\left(t^{X+2}\right) = E\left(t^2 t^X\right) \underset{linéarité}{=} t^2 E\left(t^X\right) = t^2\, G_X(t)$.

   Autre méthode: Y et la VA constante 2 sont indépendantes donc $G_Y(t) = G_X(t) \times G_2(t)$ et $G_2(t) = t^2$ d'où le résultat.

   Or si T suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors $G_T(t) = \dfrac{pt}{(1-qt)}$ donc

   si $T\ _1$ et T_2 sont indépendantes et suivent une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors

   $$G_{T_1+T_2}(t) \underset{indép}{=} G_{T_1}(t) \times G_{T_2}(t) = \left(\frac{pt}{(1-qt)}\right)^2$$

   En prenant $p = \dfrac{1}{2}$, on obtient que $G_{T_1+T_2} = G_Y(t)$.

   La fonction génératrice caractérise la loi donc Y et $T_1 + T_2$ on même loi.

   d On a donc $E(Y) = E(T_1+T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 2 \times 2 = 4$ et $E(Y) = E(X+2) = E(X) + 2$ donc $E(X) = 2$.et

   D'une part $V(Y) = V(T_1+T_2) \underset{indép}{=} V(T_1) + V(T_2) = 2 \times \dfrac{p}{q^2} = 4$

   D'autre part $Y = X + 2$ donc $V(Y) = V(X)$ donc $V(X) = 4$.

Remarque *Dans la question c, plutôt que de s'embarasser avec les rayons de convergence, il suffit de dire que les égalités sont vraies pour tout $t \in [0,1]$ car on a vu en cours que cela permet de conclure que les VA ont même loi.*

Remarque *Le reste a été fait en cours ou en TD de révision.*