CCINP 2025 MPI Mathématiques 2

Proposition de corrigé

Exercice 1

Q1. *Préliminaire.* On considère la fonction f définie sur $]\,0,+\infty\,[$ par $f(t)=\ln(t)-t$: f est dérivable et pour tout $t\in\,]\,0,+\infty\,[$ on a $f'(t)=\dfrac{1}{t}-1$, on en déduit que f est strictement croissante sur $]\,0,1\,[$ puis strictement décroissante sur $[\,1,+\infty\,[$, donc f atteint en 1 son maximum global, qui est strict et vaut $f(1)=-1$. On en déduit l'inégalité classique

$$\forall t\in\,]\,0,+\infty\,[\quad \ln(t)\leqslant t-1 \qquad \text{avec égalité si et seulement si } t=1. \tag{1}$$

On a $n\geqslant 1$ et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ on a $x_j>0$, donc $m>0$; il en suit que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ on a $\dfrac{x_k}{m}>0$, et en appliquant l'inégalité (1) on obtient $\ln\left(\dfrac{x_k}{m}\right)\leqslant\dfrac{x_k}{m}-1$. Par croissance de la somme sur $[\![1,n]\!]$ on obtient l'inégalité souhaitée.

Q2. On étudie les deux membres de l'inégalité établie en **Q1.** :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)=\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(x_k)-\ln(m)\big)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)-n\ln(m)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k-n=\frac{nm}{m}-n=0.$$

Ainsi, d'après **Q1.** on a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)\leqslant n\ln(m) \qquad \text{d'où} \qquad \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\right)=\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)\leqslant\ln(m)$$

et par croissance de l'exponentielle on déduit l'inégalité souhaitée (*inégalité arithmético-géométrique*).

Q3. En fait la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc en reprenant le raisonnement de **Q2.** on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \iff \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right) \iff \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1-\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)\right)=0$$

D'après l'inégalité préliminaire (1), les termes de la dernière somme sont tous positifs ou nuls ; il en découle que leur somme est nulle si et seulement s'ils sont tous nuls, et en exploitant la caractérisation du cas d'égalité dans (1) on obtient :

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \iff \forall k\in[\![1,n]\!]\quad \frac{x_k}{m}-1-\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)=0 \iff \forall k\in[\![1,n]\!]\quad \frac{x_k}{m}=1$$

Si l'égalité $\dfrac{x_k}{m}=1$ est satisfaite pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ alors $x_1=x_2=\cdots=x_n$, ces réels étant tous égaux à m ; réciproquement, si $x_1=\cdots=x_n$ alors chacun de ces réels est égal à leur moyenne arithmétique m, donc $\dfrac{x_k}{m}=1$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. On conclut que

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \iff x_1=x_2=\cdots=x_n.$$

Q4. Soit $B\in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, B est (orthogonalement) diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et d'après la caractérisation spectrale des matrices symétriques réelles définies positives les valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont des réels strictement positifs. Il suffit alors de rappeler l'expression du déterminant et de la trace en fonction des valeurs propres et d'appliquer l'inégalité établie en **Q2.** :

$$\det(B) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(B) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \qquad \text{d'où} \qquad \big(\det(B)\big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B)$$

l'égalité étant valable si et seulement si toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont égales à un même réel λ. Cette condition est vérifiée si $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$; réciproquement, la matrice B étant diagonalisable on peut fixer une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et dans le cas où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ on a $\Delta = \lambda I_n$ donc $B = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n \in \operatorname{Vect}(I_n)$.

Q5. On note $E_1, \ldots, E_n$ les vecteurs de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ on a $a_{i,j} = E_i^\top A E_j$; en particulier, puisque A est définie positive et le vecteur E_i est non nul, on a $a_{i,i} = E_i^\top A E_i > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Q6. La matrice D est bien définie grâce au résultat de **Q5.**. B est un produit de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, donc $B \in M_n(\mathbb{R})$; les matrices A et D sont symétriques, donc

$$B^\top = (DAD)^\top = D^\top A^\top D^\top = DAD = B$$

donc B est symétrique aussi. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul ; la matrice D est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, donc D est inversible, ainsi le vecteur $Y = DX \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est non nul ; comme A est définie positive, on a

$$X^\top BX = X^\top (DAD)X = (DX)^\top A(DX) = Y^\top AY > 0$$

Cela établit que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient d'indice (i,j) de B est égal à

$$[B]_{i,j} = [DAD]_{i,j} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} [D]_{i,r}[A]_{r,s}[D]_{s,j} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}\delta_{i,r} a_{r,s} \frac{1}{\sqrt{a_{j,j}}}\delta_{s,j} = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i,i}}\sqrt{a_{j,j}}}$$

donc $\operatorname{Tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} [B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i,i}}{a_{i,i}} = n$. D'autre part,

$$\det(B) = \det(DAD) = \det(A)\det(D)^2 = \det(A)\Big(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\Big)^{-1}.$$

Comme $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, d'après **Q4.** on a

$$\big(\det(B)\big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(B) = 1 \quad \text{donc} \quad \det(B) \leqslant 1 \quad \text{d'où} \quad \det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

(*inégalité de Hadamard*) ; de plus on a égalité si et seulement si $\big(\det(B)\big)^{1/n} = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(B)$ et d'après **Q4.** ceci se vérifie si et seulement si $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$. Si $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$ alors B est une matrice diagonale ; on a $A = D^{-1}BD^{-1}$, donc A est une matrice diagonale en tant que produit de matrices diagonales. Réciproquement, si A est une matrice diagonale alors $B = DAD = I_n \in \operatorname{Vect}(I_n)$. On conclut que, pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, l'égalité $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$ est valable si et seulement si A est diagonale.

Exercice 2

Dans cet exercice, on établit quelques propriétés élémentaires classiques des polynômes de Tchebychev P_n.

Q7. On constate que l'égalité $\deg(P_n) = n$ est vraie pour $n \in \{0,1\}$ (*initialisation*).
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$; on a $\deg(2XPn+1) = 1 + (n+1) = n+2 > \deg(P_n)$ donc $\deg(P_{n+2}) = \max\{\deg(2XP_{n+1}), \deg(P_n)\} = n+2$.
Par récurrence (double), on conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(P_n) = n}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le coefficient dominant de P_n. Le degré de $2XP_{n+1}$ est strictement plus grand que celui de P_n, donc le coefficient dominant de $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ est égal à celui de $2XP_{n+1}$, autrement dit $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 2 et de terme initial $c_1 = 1$, donc pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $c_n = 2^{n-1}c_1 = 2^{n-1}$.

Le coefficient dominant de P_0 vaut 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient dominant de P_n vaut 2^{n-1}.

Q8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{E}_n$ le prédicat $\quad \forall \theta \in \mathbb{R} \;\; P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.
L'égalité $\mathcal{E}_1$ découle directement de la substitution de l'indéterminée X par $\cos(\theta) = \cos(1\theta)$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(0\theta) = \cos(0) = 1$, donc $\mathcal{E}_0$ est vraie aussi.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ sont vraies ; l'évaluation en $\cos(\theta)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}\big(\cos(\theta)\big) - P_n\big(\cos(\theta)\big) = 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta) \\ &= \cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big) - \cos(n\theta) = \cos\big((n+2)\theta\big) \end{aligned}$$

cela établit $\mathcal{E}_{n+2}$. Par récurrence (double), on conclut que $\quad \forall n \in \mathbb{N} \; \forall \theta \in \mathbb{R} \;\; P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Q9. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, donc par produit et composition la fonction

$$f_{P,Q} : t \longmapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2}(1+t)^{-1/2}$$

est continue sur $]-1,1[$.
On a $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} P(t)Q(t)(1+t)^{-1/2} = \frac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t\to 1^-}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$ qui est intégrable en 1^- (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en 1^- aussi. D'une manière analogue, $\displaystyle\lim_{t\to(-1)^+} P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2} = \frac{P(-1)Q(-1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t\to(-1)^+}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{(1+t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ qui est intégrable en $(-1)^+$ (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en $(-1)^+$ aussi.
Cela montre que $f_{P,Q}$ est intégrable sur $]-1,1[$; il en découle que l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ converge.

Deuxième raisonnement, et expression du produit scalaire comme intégrale sur un segment.
L'application $\varphi : \theta \longmapsto \cos(\theta)$ est de classe C^1, de dérivée $\varphi' : \theta \longmapsto -\sin(\theta)$, et induit une bijection strictement décroissante de $]0,\pi[$, où $\sin > 0$, vers $]-1,1[$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$; par changement de variable, les intégrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{\pi}^{0} \frac{P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

sont de même nature et valeur en cas de convergence. Par composition et produit de fonctions continues, $\theta \longmapsto P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc sa restriction à $]-1,1[$ a un prolongement continu au segment $[-1,1]$: il en suit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ est faussement impropre, donc convergente, et on conclut que l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ est convergente et

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \tag{2}$$

Q10. D'après **Q9.**, $\langle\, ,\, \rangle$ est une application bien définie de $\mathbb{R}[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La multiplication sur $\mathbb{R}$ est distributive sur l'addition et commutative, et l'évaluation est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$; il en suit que pour $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale sur $]-1,1[$ on a

$$\langle Q, P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle$$

$$\langle P, Q+\lambda R\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)+\lambda P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P, Q\rangle + \lambda\,\langle P, R\rangle$$

donc $\langle\, ,\, \rangle$ est une forme symétrique et linéaire à droite, donc bilinéaire, sur $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$: pour tout $t \in\,]-1,1[$ on a $\dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$ donc $\langle P, P\rangle \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. On suppose que $\langle P, P\rangle = 0$: la fonction $t \longmapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $]-1,1[$,

donc elle est identiquement nulle sur cet intervalle ; il en suit que tout élément de l'intervalle $]-1,1[$, qui est un ensemble infini, est une racine du polynôme P, donc P est le polynôme nul.

On conclut que $\langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, donc il induit par restriction un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q11. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$; on linéarise un produit de fonctions circulaires :

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)}{2}$$

Or si p est un entier relatif non nul, on a

$$\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\frac{\sin(p\theta)}{p}\Big]_0^\pi = 0$$

tandis que pour $p = 0$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}\theta = \pi$; par linéarité de l'intégrale, il en résulte que

$$\boxed{\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}}$$

Q12. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on utilise **Q8.**, l'expression (2) du produit scalaire et le résultat de **Q11.** :

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_0^\pi P_n(\cos(\theta))P_m(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

autrement dit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la norme euclidienne du polynôme P_n est égale à $\sqrt{\pi}$ si $n = 0$ et à $\sqrt{\pi/2}$ si $n > 2$; il en résulte que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n}$$

est orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(Q_0, \ldots, Q_k)$ est une famille de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ d'après **Q7.**, toujours orthonormale donc libre, et $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$: on conclut que

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N}, \text{ la famille } (Q_0, \ldots, Q_k) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_k[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle\,,\,\rangle.}$$

Problème – Matrices de rang 1

Partie I – Exemples

On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées.

Q13. Soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(\omega)$ est égale à $X_j(\omega)U(\omega)$, donc le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de $M(\omega)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(U(\omega))$; ainsi $Y(\omega) = \mathrm{rg}(M(\omega)) \in \{0, 1\}$. Cela montre que Y est une variable aléatoire de Bernoulli.

Si $U(\omega)$ est le vecteur nul, alors $M(\omega)$ est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et $Y(\omega) = 0$.

Si $U(\omega)$ n'est pas nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_i(\omega) \neq 0$, donc le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de $M(\omega)$, à savoir $X_i(\omega)^2$, est non nul : la matrice $M(\omega)$ est non nulle, donc $Y(\omega) > 0$ et nécessairement $Y(\omega) = 1$.

Ainsi l'événement $\{Y = 0\}$ est égal l'événement $\{U = 0_{n,1}\}$, c'est-à-dire l'intersection $\displaystyle\bigcap_{i=1}^n \{X_i = 0\}$; par indépendance mutuelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - (1-p)^n$$

autrement dit, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

Q14. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $X_i(\omega) \in \{0,1\}$ car X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, donc $X_i(\omega)^2 = X_i(\omega)$; par conséquent

$$\operatorname{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

donc $\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En tant que somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p,

$$\boxed{\operatorname{Tr}(M) \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p).}$$

Q15. On fixe $\omega \in \Omega$: on a

$$M(\omega)^2 = \big(U(\omega) \times U(\omega)^\top\big)^2 = U(\omega) \times \big(U(\omega)^\top \times U(\omega)\big) \times U(\omega)^\top$$

Or $U(\omega)^\top \times U(\omega) \in M_1(\mathbb{R})$ est assimilée au réel $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \operatorname{Tr}\big(M(\omega)\big)$; il en suit que

$$M(\omega)^2 = \operatorname{Tr}\big(M(\omega)\big)\big(U(\omega) \times U(\omega)^\top\big) = \operatorname{Tr}\big(M(\omega)\big)\, M(\omega).$$

Cela établit que les variables aléatoires M^2 et $\operatorname{Tr}(M)M$ sont égales.
$M(\omega)$ est une matrice de projection si et seulement si

$$M(\omega)^2 = M(\omega) \iff \operatorname{Tr}\big(M(\omega)\big)\, M(\omega) = M(\omega) \iff M(\omega) = 0_n \text{ ou } \operatorname{Tr}\big(M(\omega)\big) = 1$$

donc l'événement $\{M^2 = M\}$ est la réunion des événements $\{M = 0_n\}$ et $\{\operatorname{Tr}(M) = 1\}$, qui sont incompatibles. D'après **Q14.** la loi de $\operatorname{Tr}(M)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; l'événement $\{M = 0_n\}$ est égal à $\{\operatorname{rg}(M) = 0\}$ et la loi de $Y = \operatorname{rg}(M)$ a été déterminée en **Q13.** ; par additivité finie de $\mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\operatorname{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement} \ll M \text{ est une matrice de projection} \gg \text{ est égale à } (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.}$$

Q16. Les calculs d'événements faits en **Q13.** et en **Q15.** restent valables, on doit toutefois recalculer leurs probabilités en tenant compte des nouvelles hypothèses sur $(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi l'événement considéré $\{M^2 = M\}$ est toujours égal la réunion des événements incompatibles $\{M = 0_n\}$ et $\{\operatorname{Tr}(M) = 1\}$, donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\operatorname{Tr}(M) = 1)$. On a

$$\{M = 0_n\} = \{Y = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\} \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{P}(M = 0_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

car $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En utilisant la distribution conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ pour exprimer la distribution de probabilité de $\operatorname{Tr}(M)$ on obtient

$$\mathbb{P}(\operatorname{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1\Big) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1}} \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\big)$$

Pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ est satisfaite si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ on a $x_i = 0$; en utilisant l'indépendance de $X_1, \dots, X_n$ et leur loi commune $\mathcal{P}(\lambda)$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\operatorname{Tr}(M) = 1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(\{X_k = 1\} \cap \bigcap_{i \neq k} \{X_i = 0\}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1) \prod_{i \neq k} \mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} (\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1} = n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathrm{e}^{-n\lambda} + n\lambda \mathrm{e}^{-n\lambda}}$

Q17. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Les colonnes de J sont toutes égales à la matrice colonne non nulle $u = \sum_{k=1}^{n} e_k$, donc le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'elles engendrent est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$; ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(J) = 1}$ et par ailleurs $\boxed{\mathrm{Tr}(J) = n}$

On a $J^2 = nJ$ donc J admet comme polynôme annulateur $X^2 - nX = X(X - n)$; ce polynôme est scindé à racines simples donc J est diagonalisable (on arrive à la même conclusion en observant que J est une matrice symétrique réelle) et les valeurs propres de J sont 0 et n, de sous-espaces propres associés

$$\mathrm{Sep}_n(J) = \mathrm{Vect}(u) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sep}_0(J) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n)$$

On en déduit la diagonalisation

$J = P\,\mathrm{Diag}(n, 0_{n-1})P^{-1}$ où P est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les éléments de la première ligne et de la première colonne sont égaux à 1, les autres éléments diagonaux sont égaux à -1, et tous les autres éléments sont nuls.

Q18. On considère par exemple la matrice carrée d'ordre 3 $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

N possède une seule colonne non nulle, donc $\mathrm{rg}(N) = 1$.
N est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont nuls, donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$; si N était diagonalisable alors il existerait une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P0_3P^{-1}$ donc $N = 0_3$, mais ce n'est pas le cas : on conclut que N n'est pas diagonalisable.

Dans cet exemple, on a $\boxed{\mathrm{Tr}(N) = 0}$ *En fait, il sera établi à la question **Q22.** que la condition* $\mathrm{Tr}(N) = 0$ *est nécessaire pour que N ne soit pas diagonalisable.*

Partie II – Résultats généraux

Q19. L'image de la matrice A est le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A, et le rang de A est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$; comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{Im}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ donc au moins une des colonnes de A est non nulle : cela justifie l'existence d'un (plus petit) $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $C = C_k \neq 0_{n,1}$.
De plus, $\mathrm{Vect}(C) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(C)) = 1 = \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, donc $\mathrm{Vect}(C) = \mathrm{Im}(A)$; il en suit que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $C_j \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C)$ donc il existe un réel x_j tel que $C_j = x_jC$; en particulier $C = C_k = x_kC$ avec $C \neq 0_{n,1}$ donc $x_k = 1$. En notant $L = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, L est une matrice ligne non nulle telle que $A = C \times L$ comme voulu.

Q20. En assimilant la matrice $L \times C \in M_1(\mathbb{R})$ à son unique élément et en utilisant les propriétés de la trace on obtient

$$L \times C = \mathrm{Tr}(L \times C) = \mathrm{Tr}(C \times L) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{L \times C = \mathrm{Tr}(A)}$$

(*en explicitant les coefficients de L et C, $L = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de $A = C \times L$ est égal à y_ix_i, donc* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = L \times C$).
Par associativité de la multiplication matricielle,

$$A^2 = (C \times L)^2 = C \times (L \times C) \times L = \mathrm{Tr}(A)\,(C \times L) = \mathrm{Tr}(A)A \quad \text{comme voulu.}$$

Q21. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1 > 0$; il en suit que 0 est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à $n-1$, donc X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A. D'après les propriétés générales du polynôme caractéristique, on sait χ_A est un polynôme unitaire de degré n et que le coefficient de son terme de degré $n - 1$ est égal à $-\mathrm{Tr}(A)$; ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X - \mathrm{Tr}(A))X^{n-1}}$

D'après **Q20.**, $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de A, donc le polynôme minimal π_A de A est un diviseur unitaire de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$; comme $0 < \mathrm{rg}(A) = 1 < n$, A n'est pas un multiple scalaire de la matrice identité I_n, donc π_A est de degré strictement supérieur à 1. On déduit que $\boxed{\pi_A(X) = (X - \mathrm{Tr}(A))X}$

Q22. La matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$; d'après **Q21.**, π_A est scindé, et il est à racines simples si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Q23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$; l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être vide, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ contient au moins un vecteur non nul, on note ϵ_2 un tel vecteur et on fixe un vecteur $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\epsilon_2 = u(\epsilon_1)$. Le sous-espace vectoriel engendré par ϵ_2 est inclus dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(\epsilon_2)) = 1$, d'autre part $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(A) = 1$ aussi, donc $\mathrm{Vect}(\epsilon_2) = \mathrm{Im}(u)$; $\mathrm{Vect}(\epsilon_2)$ est également inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$, et on en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u) = n - 1$; ϵ_2 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$, donc d'après le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $\epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ tels que $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$. On considère la famille $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$, et une famille $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\epsilon_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. En appliquant l'endomorphisme u on obtient

$$0_{\mathbb{R}^n} = u\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\epsilon_i\Big) = a_1 u(\epsilon_1) + \sum_{i=2}^{n} a_i \underbrace{u(\epsilon_i)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = a_1\epsilon_2$$

et comme ϵ_2 n'est pas le vecteur nul on déduit que $a_1 = 0$; la sous-famille $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ donc elle est libre, par conséquent $a_2 = \dots = a_n = 0$. Cela établit que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de cardinal égal à $n = \dim(\mathbb{R}^n)$: ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comme $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est celle de l'énoncé.

Q24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, autrement dit $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ en somme directe. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à cette décomposition en somme directe : on a $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(A) = 1$ donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1)$; en particulier $u(\epsilon_1) \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(\epsilon_1) = a\epsilon_1$. Les autres vecteurs $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ appartiennent tous à $\mathrm{Ker}(u)$, donc $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. Il en résulte que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est celle de l'énoncé ; cette matrice doit être de rang égal à $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $a \neq 0$.

Q25. D'une part, en général deux matrices semblables ont la même trace.

Soit A une matrice de rang 1 ; puisque les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ par rapport à deux bases de $\mathbb{R}^n$ sont semblables, d'après **Q23.** et **Q24.**, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la matrice A appartient à la classe de similitude de la matrice M_a, où

$$M_0 = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-2}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad M_a = \mathrm{Diag}(a, 0_{n-1}).$$

Or on constate que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $a = \mathrm{Tr}(M_a)$; il en suit que toute matrice A de rang 1 est semblable à la matrice $M_{\mathrm{Tr}(A)}$. Par transitivité et symétrie de la relation de similitude, deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 ayant la même trace sont semblables.