

Vendredi 22 mai 2026

Exercice 1 (Ccinp) Trois enfants A, B et C jouent à la balle:

- A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une proba de $\frac{1}{4}$.
- B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une proba de $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B . On note a_n, b_n et c_n les probabilités que A, B ou C ait la balle à la $n^{\text{ième}}$ étape.

1. Exprimez a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

2. Trouvez une matrice M telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

3. Déterminez la limite de $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ quand $n \rightarrow +\infty$ et montrez que cette limite est indépendante des conditions initiales.

Exercice 2 (Ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler la définition du produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille (I_3, J) est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le projeté orthogonale de A sur le sous-espace engendré par (I, J) .

Exercice 3 (IMT) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de même paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = \frac{X}{Y}$.

1. Déterminer l'espérance de U .

2. Montrer que $E(U) > 1$.

3. Trouver la loi de U .

Exercice 4 Soit x_0, \dots, x_n des réels distincts. et $\mathcal{B} = ((X + x_0)^n, \dots, (X + x_n)^n)$ une famille de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Ecrire la matrice de la famille \mathcal{B} dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En déduire que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5 (Ccinp) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix}$. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable et préciser son spectre.

2. Montrer que 0 est valeurs propres de B et déterminer la dimension du sous-espace propre $E_0(B)$.

3. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Que peut-on dire de $\begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
En déduire que B est diagonalisable.

4. Généraliser lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et de rang n .

Exercice 6 (Mines) Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une famille de réels distincts et (b_0, b_1, \dots, b_n) une famille de réels.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(a_i) = b_i$.

2. Montrer qu'il existe une unique famille de $n+1$ réels $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i).$$

Exercice 7 (centrale)

On note E l'espace vectoriel complexe formé des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit un paramètre $\alpha \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on définit $f_k \in E$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = x^k e^{\alpha x}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par f_0, f_1, \dots, f_n .

1. Déterminer la dimension de E_n .

2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ définit un endomorphisme de E_n .

3. a: Montrer que D_n est bijectif si et seulement si $\alpha \neq 0$.

b: Montrer plus généralement que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'endomorphisme $P(D_n)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P .

4. Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$ tels que $Q(\alpha) \neq 0$, et soit le polynôme $R = PQ$. Montrer que :

$$\ker R(D_n) = \ker P(D_n).$$

5. Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geq n$.

Montrer que la matrice de l'endomorphisme $P(D_n)$ dans la base f_0, f_1, \dots, f_n est:

$$M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n} \quad \text{avec } m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j}{i} P^{(j-i)}(\alpha) & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Attention : contrairement aux conventions habituelles, la numérotation des lignes et des colonnes commence à 0 .

Exercice 8 (Mines ponts 25 transmis par un étudiant du lycée Michelet)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On définit l'application $D : E \rightarrow E$ par :

$$D((u_n)) = (u_{n+1} - u_n)$$

1. Montrer que D est un endomorphisme de E . Est-il injectif ? surjectif ?

2. Trouver les valeurs propres de D et les vecteurs propres associés.

3. Soit $F = \{(u_n) \in E \mid \sum u_n^2 \text{ Converge}\}$. On définit, pour $u, v \in F$, $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ (i)

(a) Montrer que F est stable par D

(b) Montrer que l'égalité (i) définit un produit scalaire de F .

(c) Soit $G = \left\{ \frac{\langle u, D(u) \rangle}{\|u\|^2}; u \in F \right\}$. Montrer $G \subset [-2, 1]$.

(indication considérer $\frac{\langle u, s(u) \rangle}{\|u\|^2}$ avec $s = D + id_E$.)