Mercredi 20 mai 2026 **(eulicien, probas)**

Exercice 1 *CCINP PSI 2021: Une secrétaire effectue une premiére fois un appel téléphonique vers chacun de ses n correspondants. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$ et X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus après une série d'appels.*

1. *Donner la loi de X.*
2. *La secrétaire rappelle une seconde fois dans les mêmes conditions les $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre lors de la première série d'appels. On note Y nombre de correspondants obtenus après la deuxième série d'appels.et Z le nombre total de correspondants joints.*
   (a) *Exprimer Z en fonction de X et Y. Préciser les valeurs possibles pour Z.*
   (b) *Calculer $P(Z = 0)$. Montrer que $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1 + q)$.*
   (c) *Soit $k \in [[0, n]]$. Calculer $P(Y = i | X = k)$.*
   (d) *Montrer que si $0 \leq k \leq i \leq n$, alors $\binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k} = \binom{i}{k}\binom{n}{i}$. En déduire que $P(Z = i) = \binom{n}{i}(q^2)^{n-i}(1 - q^2)^i$.*

Exercice 2 *(Ccp) Soit $b = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $a = e_1 + e_2 + e_3$.*
Donner la matrice, dans la base b, de la rotation vectorielle r d'axe $vect(a)$ orienté par a et d'angle $\theta = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Exercice 3 *CCINP PSI 2024*
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules (numéros de 1 à X) dans une urne, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec $\forall \mathfrak{i} \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = \mathfrak{i}) = \frac{\mathfrak{i}}{2^{i+1}}$.
On procède à un tirage et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. *Montrer que la définition de la loi de X est cohérente.*
2. *Calculer $\mathbb{E}(X)$.*
3. *Déterminer la loi conjointe de X et Y.*
4. *Calculer la loi de Y et son espérance.*

Exercice 4 *Ccp: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice* $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que M est une matrice orthogonale.*
2. *Déterminer la nature et les éléments caractèristiques de l'endomorphisme f. géométriquement.*

Exercice 5 *CCINP PSI 2023*
Une entreprise commercialise deux produits A et B.
Le service après-vente reçoit des appels concernant ces deux produits, 20% *pour le produit A et* 80% *pour le produit B.*
On note X_A (resp. X_B) la variable aléatoire qui compte le nombre d'appels avant d'en avoir un qui concerne le produit A (resp. B).
On note L la variable aléatoire qui compte la longueur de la première chaîne d'appels sur un même produit.
Par exemple, si on reçoit les appels $AAABBAB....$, alors $X_A = 1, X_B = 4, L = 3$.

1. *Déterminer la loi de X_A. Montrer que X_A admet une espérance et une variance finies et les calculer. Faire de même pour X_B.*

2. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $(L = n)$ en distinguant selon le $(n+1)$-ième appel.*
   En déduire que $\mathbb{P}(L = n) = 0,8 \times \mathbb{P}(X_A = n) + 0,2 \times \mathbb{P}(X_B = n)$.

3. *En déduire que L admet une espérance finie et la calculer.*

Exercice 6 *(Mine telecom) Soit u un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Donner l'image et le noyau de $f : x \mapsto u \wedge x$.*

2. *Soit E un espace vetctoriel de dimension finie de base B et (u_n) une suite de $\mathcal{L}(E)$.*
   On pose $M_n = mat_B(u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la suite (M_n) converge.

3. *On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^k}{k!}$. Montrer que la suite (g_n) converge vers un endomorphisme g à préciser.*

Exercice 7 *Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à une urne contenant n boules non discernables numérotées de 1 à n.*
On effectue des tirages et, à chaque tirage, on supprime de l'urne les boules dont le numéro est supérieur ou égal à celui de la boule tirée.
On note X_n le nombre de tirages nécessaires pour vider entièrement l'urne.

1. *. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_1)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2)$.*

2. *Montrer que $\forall n \geqslant 2, \mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$.*

3. *Montrer que $\mathbb{E}(X_n)$ est équivalent à $\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 8 *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\frac{1}{3}(I_n + 2M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*
Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(MX|X) = \|X\|^2$. Déterminer la matrice M.

Exercice 9 *On considère une puce se déplaçant sur les points d'un quadrillage identifié à $\mathbb{Z}^2$. On note (X_n, Y_n) la position de la puce à l'instant n et on suppose que*
- $X_0 = Y_0 = 0$,
- entre l'instant n et l'instant $n+1$, la puce fait un saut aléatoire de longueur 1 dans l'une des 4 directions avec équiprobabilité des directions,
- les sauts sont indépendants les uns des autres.
On pose $Z_n = X_n + iY_n$ et pour $n \geq 1$, $\Delta_n = Z_n - Z_{n-1}$.

1. *Préciser la loi de Δ_n. En déduire l'espérance de Z_n, X_n et Y_n.*

2. *Justifier que X_n et Y_n ont même loi. Calculer $E\left(|Z_n|^2\right)$.*

3. *En déduire que $E\left(\sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\right) \leq \sqrt{n}$.*

4. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X_n = Y_n = 0)$.*

   (a) *Justifier que $p_{2n+1} = 0$.*

   (b) *Montrer que $p_{2n} = \dfrac{1}{4^{2n}} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.*

(c) *Exprimer* p_{2n} *à l'aide de* $\binom{2n}{n}$.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES TRES CLASSIQUES

Exercice 10 *(Ccp 2016) Soit* E *un espace euclidien et* f *un endomorphisme de* E *vérifiant* $\forall x \in E, \left(f\left(x\right)|x\right) = 0$.

1. *Montrer que* $\forall \left(x, y\right) \in E^2,\ \left(f\left(x\right)|y\right) = -\left(x|f\left(y\right)\right)$.
2. *En déduire que la matrice de* f *dans une base orthonortmée est antisymétrique.*
3. *Comparer* $\ker\left(f\right)$ *et* $\operatorname{Im}\left(f\right)^{\perp}$.
4. *Montrer que* $f \circ f$ *est diagonalisable.*

Exercice 11 *(Centrale) Calculer* $\inf\limits_{a,b,c} \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 dt}$ *(on pourra interpréter ce nombre comme étant la distance d'un point à un sous-espace.*