

Mercredi 13 mai 2026 matin (réduction)

Exercice 1 (ccinp) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $4A^2 + 2A + I_n = 0$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable?
2. Calculer $\det(A)$ et $\text{tr}(A)$.

Exercice 2 (Ccinp): Soit x_1, \dots, x_n et y_1, \dots, y_n des complexes.

1. Déterminer le rang de $M - I_n$.
2. En déduire que $M - I_n$ est semblable à une matrice admettant $n - 1$ colonnes nulles.
3. Calculer le déterminant de la matrice M .

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & & x_2 y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & & 1 + x_n y_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 CCINP: Soit E un espace vectoriel de dimension n , l une forme linéaire non nulle de E et a un vecteur non nul de E . On définit l'application f de E dans E définie par $f(x) = l(a)x - l(x)a$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Calculer $f(a)$.
3. Déterminer un polynôme annulateur de f . Que peut-on en déduire si $l(a) \neq 0$?
4. Déterminer les éléments propres de f . Que peut-on en déduire si $l(a) = 0$?

Exercice 4 Soit A une matrice carrée de taille n inversible. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 5 (ccinp): Soit n un entier, $n \geq 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,1} = i$ pour $i \in [[1, n]]$, $a_{1,j} = j$ pour $j \in [[1, n]]$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Déterminer le rang de A et la dimension de $\ker(A)$.
2. A est-elle diagonalisable? Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0?
3. Déterminer le plus petit sous-espace stable par f contenant e_1 .
On note ce sous-espace F et f_F l'endomorphisme induit par f sur F .
4. Déterminer le spectre de f_F . En déduire le spectre de A .
5. Donner un polynôme non nul vérifiant $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Exercice 6 Centrale PSI: Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables?
2. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n . Montrer que P est scindé sur \mathbb{R} si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\text{Im}(z)|^n$.
3. Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A . Montrer que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Etablir la réciproque de la question précédente.
5. Que peut-on déduire des questions 3 et 4?