Mercredi 13 mai 2026 après midi **(réduction)**

Exercice 1 *CCINP PSI: Soit* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *et* f *l'application de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par*

$$f(M)=aM+bM^T.$$

1. *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *(respectivement* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$*) le sous-ensembles de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).*
   (a) *Montrer que* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ *sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) *Déterminer la dimension de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
2. *Vérifier que* f *est un endomorphisme.*
3. *Montrer que* f *est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.*
4. *Déterminer la trace et le déterminant de* f.

Exercice 2 *Mines telecom: Soit* $E=\mathbb{R}_3[X]$ *et* $\varphi:\left\{\begin{array}{c} E\to E \\ P\mapsto P(1-X)\end{array}\right.$ *.et* $n\in\mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* φ *est un endomorphisme. Ecrire la matrice* A *de* φ *dans la base canonique de* E.
2. *L'endomorphisme* φ *est-il bijectif?*
3. *Déterminer un polynôme annulateur de* φ.
4. *Donner les éléments propres de* φ.
5. *Généraliser les questions précédentes à* $E=\mathbb{R}_n[X]$.
6. *En déduire la valeur de* $\sum\limits_{k=i}^{j}(-1)^{i+j}\times\binom{k}{i}\times\binom{j}{k}$ *pour* $0\le i\le j\le n-1$.

Exercice 3 *Soit* $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. *On suppose que* $sp(A)\cap sp(B)=\emptyset$.

1. *Montrer que* $\chi_A(B)$ *est une matrice inversible.*
2. *En déduire que pour tout* $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX=XB\Leftrightarrow X=0$.
3. *Montrer que* $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $M=AX-XB$.

Exercice 4 *(Centrale): Soit* $x\in\mathbb{R}^n$ *non nul. On note* E_x *l'ensemble des matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *admettant* x *comme vecteur propre. Montrer que* E_x *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et préciser sa dimension.*

Exercice 5 *ENS PSI 21: Soit* $n\ge 2$. *On appelle pseudo-inverse de* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *toute matrice* $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant:*

$$AB=BA\ ,\ A=ABA\ \text{et}\ B=BAB$$

Pour toute matrice A, *on note* a *l'endomorphisme canoniquement associé.*

1. *Soit* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $rg(a)=rg(a^2)=r$. *Montrer que* $\mathbb{R}^n=\ker(a)\oplus\operatorname{Im}(a)$. *Montrer qu'il existe* $C\in\mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ *et* $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A=P\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)P^{-1}$.
2. *Montrer que* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *admet un pseudo-inverse si et seulement si* $rg(a)=rg(a^2)$.

3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un pseudo-inverse B et b l'endomorphisme canoniquement associé.à B.*

   (a) *Montrer que $a \circ b$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.*

   (b) *Montrer que A admet un unique pseudo-inverse que l'on notera A^+.*

   (c) *Montrer que A^+ est un polynôme en A.*

4. *On suppose que A^+ existe et que $(\mathrm{Im}(a))^\perp = \ker(a)$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le vecteur A^+y minimise la fonction $f : x \mapsto \|Ax - y\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'il est le vecteur de norme minimale parmi tous les vecteurs qui minimise f.*