

mardi 19 mai 2026 (espaces euclidiens)

Exercice 1 (ccinp): Soit u et v deux vecteurs distincts et non nuls d'un espace euclidien E . On note H l'hyperplan normal à $u - v$ et s_H la réflexion par rapport à H .

1. Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. $u = (1, -1, 1, 0)$ et $v = (0, -1, 1, 1)$.
Ecrire la matrice dans la base canonique de la réflexion s_H . En déduire que $s_H(u) = v$.
2. Montrez que s'il existe une réflexion s telle que $s(u) = v$, alors $\|u\| = \|v\|$.
3. On suppose que $\|u\| = \|v\|$.
 - a Montrer que $u - v$ et $u + v$ sont orthogonaux. En déduire que $s_H(u) = v$.
 - b Soit s une réflexion. Montrer que si $s(u) = v$ alors $s = s_H$.

Exercice 2 (Ccinp) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) Q^{(k)}(1)$ noté $(P|Q)$

1. Montrer que cette égalité définit un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$.
 - (a) Montrer que $F = \text{vect}(1)^\perp$.
 - (b) Déterminer la distance de X à F .

Exercice 3 (ccinp)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si M est une matrice orthogonale, alors $|\det(M)| = 1$. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?
2. Déterminer les matrices orthogonales et symétriques.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale antisymétrique.
4. On suppose que M est orthogonale et antisymétrique.
 - a Montrer que n est pair.
 - b Montrer que $M^4 = I_n$ (utiliser Q2).
 - c Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{sp}(M) = \emptyset$.
 - d En déduire que $M^2 = -I_n$.

Exercice 4 (ccp psi): Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \times A^T \times A = I_n$, alors A est inversible et symétrique. En déduire la valeur de A .

Exercice 5 Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et M la matrice définie par blocs par $M = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -U^T \\ \hline U & I_n \end{array} \right)$.

1. Montrer que la matrice UU^T est diagonalisable et vérifie $\text{sp}(UU^T) \subset \mathbb{R}_+$.
2. Calculer $M^T \times M$. En déduire que M est inversible.
3. Montrer que $M^{-1} \times M^T$ est une matrice orthogonale.

Exercice 6 (Ccp) : Soit p un projecteur orthogonal de rang r d'un espace euclidien E de dimension n et de base orthonormale $b = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = (p(x) | x)$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Exercice 7 (centrale) Soit un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que:

$$\exists (M_1, M_2) \in (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))^2, \forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AM_1) \leq \text{Tr}(AM) \leq \text{Tr}(AM_2)$$

3. On suppose que $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ M & \mapsto \text{Tr}(M) \end{cases}$.

Déterminer $f(O_n(\mathbb{R}))$ (on pourra distinguer le cas n pair et le cas n impair).

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincte de I_n vérifiant A est symétrique et inversible et A est semblable à A^{-1} .

2. Donner une condition pour qu'une matrice diagonale et inversible soit semblable à son inverse.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A est symétrique, inversible est semblable à A^{-1} , alors $\text{tr}(A^2) \geq n$.

Exercice 9 (mines ponts) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire

$$(A, B) \mapsto (A | B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt.$$

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

1. Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E .

2. Montrer que u est autoadjoint.

3. Montrer que u est bijectif.