

# Mardi 12 mai 2025 (algèbre linéaire)

**Exercice 1** (ccinp) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $\mathbb{R}[A]$  l'ensemble des matrices  $P(A)$  où  $P$  est un polynôme à coefficients réels quelconque.

1. Montrer que  $\mathbb{R}[A]$  est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Citer le théorème de Cayley-Hamilton. En déduire que  $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq n$ .

Dans la suite de l'exercice,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Montrer que  $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_3, A, A^2)$ .
5. Montrer que  $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\} = \mathbb{R}[A]$ .

**Exercice 2** CCINP PSI 21:

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$  tel que  $u^2 = 0$  et  $\text{rg}(u) = n$ .

(a) Montrer que  $\ker(u) = \text{Im}(u)$ .

(b) Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à  $\left( \begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ .

2. Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$  tel que  $u^3 = 0$  et  $\text{rg}(u) = 2n$ .

(a) Montrer que  $\dim(\text{Im}(u^2)) \geq n$ .

(b) En déduire que  $\ker(u) = \text{Im}(u^2)$ .

(c) Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{3n}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à  $\left( \begin{array}{c|c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ .

**Exercice 3** (ccinp) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ . Donner une expression factorisée du déterminant de  $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4** (Ccinp): Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

On suppose qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P$  soit de degré non nul et vérifie  $P(0) = 1$  et  $AB = P(A)$ .

1. Etablir que  $A$  est inversible.
2. En déduire  $A$  et  $B$  commutent.

**Exercice 5** (Ccinp) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Montrer que si  $\alpha \neq 0$ , alors la famille  $\left( X^k (X + \alpha)^{n-k} \right)_{k \in [0, n]}$  est base de  $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$ .

2. Soit  $a$  et  $b$  deux complexes distincts. Montrer que la famille  $\left( (X - a)^k (X - b)^{n-k} \right)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$ .

**Exercice 6** (Mines ponts) Soient  $n \geq 2$ ,  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$  et  $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$ .

1. Les ensembles  $H$  et  $N$  sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?

2. Montrer que  $N \subset H$ .

3. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  contenant  $N$ .

**Exercice 7** (Mines ponts): Soit  $a_0, \dots, a_n$  des complexes. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) :  $a_0 \neq 0$

(ii) :  $\forall Q \in \mathbb{C}_n[X], \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \mid Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$ .

**Exercice 8** (X psi) Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

1. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang  $r$  avec  $0 < r < n$ . Montrer qu'il existe  $(P_1, P_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$  telle que  $P_1 M P_2$  soit égale à la matrice définie par blocs  $\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right)$  ou  $I_r$  est la matrice carrée identité de taille  $r$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant:  $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ . Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

3. Déterminer les matrices  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant:

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$