

Lundi 18 mai 2026 (réduction)

Exercice 1 (Ccp): Soit $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (x_n) des suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}.$$

1. Ecrire ces relations sous forme vectorielle $X_{n+1} = AX_n$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable? Montrer que 1 est valeur propre de A . Déterminer les éléments propres de A .
3. A quelle condition les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ et (x_n) convergent toutes vers 0?

Exercice 2 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont elles diagonalisables?

Exercice 3 (Ccinp):

1. Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E .
Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors tout sous-espace propre de u est stable par v .
2. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. En déduire 4 solutions de l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Existe-t-il d'autres solutions de l'équation précédente?
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes strictement positives
Combien existe-t-il de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$?

Exercice 4 Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$

1. On suppose que A et B sont diagonalisables, dans une même base et que les valeurs propres de B sont deux à deux distinctes.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.

2. Application: On suppose que $n = 3$ et qu'il existe $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}AQ =$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner un polynôme P tel que $A = P(B)$.

3. On suppose que A et B sont diagonalisables, dans une même base
Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux polynômes P_A et P_B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $A = P_A(C)$ et $B = P_B(C)$.

Exercice 5 mines telecom: Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice $M(z)$ a-t-elle des valeurs propres multiples?
2. A quelle condition la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable?
3. Démontrer que si $M(z)$ admet une valeur propre de module supérieur ou égale à 1, alors $|z| \geq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que si $|z|$ est assez petit, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M(z)^n) = 0$.

Exercice 6 Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$

1. Donner un exemple de matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable dont le carré est diagonalisable.
2. Donner un exemple de matrice non inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable dont le carré est diagonalisable.
3. On suppose que A est diagonalisable et $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $P(A)$ est diagonalisable.
4. Montrer, si A est inversible, que A diagonalisable $\iff (\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k \text{ diagonalisable})$.

Exercice 7 (Centrale) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonalisables.

Exercice 8 (Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient f, g deux endomorphismes non nuls de \mathbb{C}^n tels que $f \circ g = 0$.
 - (a) Montrer que $\ker f \neq \{0\}$.
 - (b) Montrer que $\ker f$ est stable par g .
 - (c) En déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.
2. Soient deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.