Lundi 11 mai 2026 **(algèbre générale, polynômes)**

Remarque *Certains exercices ne sont pas attibués à un étudiant (ils ont parfois été déjà traités en classe). Ils sont là car*

- *Je considère qu'il est nécessaire de les revoir pour être bien préparé.*
- *Dans la cas (peu probable) ou un étudiant réussit à tout faire en moins 30 mn, on a des exos supplémentaires*

Exercice 1 *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Montrer que $(X-1)^3$ est un diviseur de $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

Exercice 2 *(ccp): Soit $n \in \mathbb{N}^*$*

1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = z_0$.*
2. *On note, pour $k \in [[0, n-1]]$, $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.*
   Pour quelles valeurs de n le complexe $P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$ est-il défini?
3. *On suppose que P est défini et on pose $x_k = \frac{1-\omega_k}{1+\omega_k}$. Exprimer ω_k en fonction de x_k. En déduire $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont racines de $(1+X)^n - (1-X)^n$.*
4. *On suppose que P est défini. Déterminer P. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.*

Exercice 3 *(Ccinp) Soit $(m, n, p) \in \mathbf{N}^3$ et $P = X^2 + X + 1$*

1. *Déterminer les racines de P.*
2. *Montrer que P divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.*
3. *Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels: P^2 divise $(X+1)^n - X^n - 1$.*

Exercice 4 *Calculer, pour x réel, $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.*

Exercice 5 *(Centrale): Pour θ réel et n entier naturel non nul, On pose $P_n = X^{2n} - 2\cos(\theta) X^n + 1$.*

1. *Déterminer les racines complexes de $X^2 - 2\cos(\theta) X + 1$.*
2. *On suppose que θ n'est pas multiple de π.*
   (a) *Donner la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.*
   (b) *En déduire la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.*
3. *Même question si θ est multiple de π.*

Exercice 6 *Mines ponts: Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

1. *Montrer que si $k \in [[1, n]]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.*
2. *En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.*
3. *En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.*

Exercice 7 *Centrale: Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme non nul vérifiant* $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *une racine de* P. *Montrer que* z^2 *est racine de* P.
2. *Montrer que les racines complexes sont soit nulles, soit de module* 1.
3. *Montrer que* 0 *n'est pas racine de* P.
4. *Déterminer les polynômes vérifiant* $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 8 *(Mines telecom) Soit* $n \in \mathbb{N}$.
A partir de l'égalité $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n$, *montrer que* $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ *comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.*

Exercice 9 *(Mines telcom) Montrer que, si* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ *en considérant deux ensembles disjoints de cardinal* n.
Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ *comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.*

Exercice 10 *(Centrale 1)*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on s'intéresse à l'existence d'un polynôme $R_k \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k} : (\mathcal{E}_k)$$

1. Trouver $R_1 \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $(\mathcal{E}_1)$. Trouver $R_2 \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $(\mathcal{E}_2)$.
2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)$.
   En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $R_k \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie $(\mathcal{E}_k)$.
3. Soit P un polynôme de la forme $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, avec $n \in \mathbb{N}$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{P(x)}{x^n} = Q\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 11 *(centrale) Soit* $P = X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ *et* x_1, x_2 *et* x_3 *les racines complexes de* P *(comptées avec multiplicité).*
Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *à l'aide des corfficients de* P.