

Lundi 11 mai 2026 (algèbre générale, polynômes)

Remarque Certains exercices ne sont pas attribués à un étudiant (ils ont parfois été déjà traités en classe). Ils sont là car

- Je considère qu'il est nécessaire de les revoir pour être bien préparé.
- Dans la cas (peu probable) ou un étudiant réussit à tout faire en moins 30 mn, on a des exos supplémentaires.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $(X - 1)^3$ est un diviseur de $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$.

Solution de l'exercice: Posons $P_n = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$.

Il suffit de vérifier que 1 est racine de multiplicité qu au moins 3 de P_n soit $P_n(1) = P'_n(1) = P''_n(1)$. Calculs sans difficultés.

Exercice 2 (ccp): Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^n = z_0$.

2. On note, pour $k \in [[0, n - 1]]$, $\omega_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$.

Pour quelles valeurs de n le complexe $P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$ est-il défini?

3. On suppose que P est défini. Déterminer les racines de $(1 + X)^n - (1 - X)^n$.

et on pose $x_k = \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$. Exprimer ω_k en fonction de x_k .

4. On suppose que P est défini. Déterminer P . En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Solution de l'exercice:

1; En posant $z = re^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$ avec $(r, \alpha) \in]0, \infty[\times [0, 2\pi[$ et $(\rho, \theta) \in]0, \infty[\times [0, 2\pi[$, on obtient $z^n = z_0 \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha} \Leftrightarrow \rho^n = r$ et $\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\alpha + k2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k$.

Or $\omega_k = \omega_{k+n}$

donc $z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [[0, n - 1]]$, $z = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k$.

2: Il existe k tel que $1 + \omega_k = 0$ si et seulement si -1 est racine de l'équation $z^n = 1$ si est seulement si n est pair.

On en déduit que P est défini si et seulement si n est n impair.

3: Posons $Q = (1 + X)^n - (1 - X)^n$ Soit $z \in \mathbb{C}$.

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow (1 + z)^n - (1 - z)^n = 0 \Leftrightarrow (1 + z)^n = (1 - z)^n$. équation dont $z = 1$ n'est pas solution

donc $Q(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 + z)^n}{(1 - z)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [[0, n - 1]]$, $\frac{1 + z}{1 - z} = \omega_k$.

Or $\frac{1 + z}{1 - z} = \omega_k \Leftrightarrow (1 + z)\omega_k = (1 - z)\omega_k \Leftrightarrow z = \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$ (n étant impair, $1 + \omega_k \neq 0$).

Le polynôme Q admet donc n racines $x_k = \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}, k \in [[0, n - 1]]$.

(ces racines sont deux à deux distinctes car pour $(k, j) \in [[0, n - 1]]^2$,

si $k \neq l$ alors $\frac{1 + x_k}{1 - x_k} = \omega_k \neq \omega_j = \frac{1 + x_j}{1 - x_j}$ donc $x_j \neq x_k$).

4: On remarque que $x_0 = 0$ donc $P = \prod_{k=1}^{n-1} x_k$ est le produit des racines non nulles de Q .

En développant, on obtient $Q = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i X^i = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $a_i = \binom{n}{i} (1 - (-1)^i)$

donc $a_n = 2$ car n est impair, $a_1 = 2n$ et $a_0 = 0$ (ce qu'on savait puisque $x_0 = 0$ est racine de Q).
 On a donc $Q = 2XQ_1$ où Q_1 est de degré $n - 1$, de coefficient dominant 1, de coefficient constant n .
 Les réels x_1, \dots, x_{n-1} sont non nuls ($\omega_k \neq 1$ si $k \in [[0, n - 1]]$) et racines de Q donc racines de Q_1 distinctes.

$$Q_1 = \prod_{k=1}^{n-1} (X - x_k) \text{ donc } Q_1(0) = (-1)^{n-1} P \text{ et } Q_1(0) = \frac{a_1}{2} = n \text{ donc } \boxed{P = (-1)^{n-1} n.}$$

$$\text{On a } \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k} = \frac{1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 + e^{ik\frac{2\pi}{n}}} = \frac{e^{ik\frac{\pi}{n}} (e^{-ik\frac{\pi}{n}} - e^{ik\frac{\pi}{n}})}{e^{ik\frac{\pi}{n}} (e^{-ik\frac{\pi}{n}} + e^{ik\frac{\pi}{n}})} = \frac{-2i \sin(k\frac{\pi}{n})}{2 \cos(k\frac{\pi}{n})} = -i \times \tan(k\frac{\pi}{n}) \text{ donc, } P = (-i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

$$\text{On en déduit que } \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{P}{(-i)^{n-1}} = i^{n-1} (-1)^{n-1} n = (-i)^{n-1} n.$$

$$\text{Or } n \text{ est impair donc si } n = 2p + 1, (-i)^{n-1} = ((-i)^2)^p = (-1)^p \text{ donc } \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^p n.$$

Exercice 3 (Ccinp) Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ et $P = X^2 + X + 1$

1. Déterminer les racines de P .
2. Montrer que P divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels: P^2 divise $(X + 1)^n - X^n - 1$.

Solution de l'exercice: 1: On a $B = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$ avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ en calculant le discriminant).

2: Posons Soit $A_n = X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$. Or

Le polynôme B divise A_n si et seulement si chaque racine complexe de B est racine de A_n avec une multiplicité comme racine de B inférieure ou égale à sa multiplicité comme racine de A_n .

• Or $A_n(j) = j^{3m+2} + j^{3n+1} + j^{3p} = j^2 + j + 1$ car $j^3 = 1$ donc $A_n(j) = B(j) = 0$.

• Le polynôme A_n est à coefficients réels et $A_n(j) = 0$ donc $A_n(\bar{j}) = A_n(j^2) = 0$.

On en déduit que B divise A_n .

3: On pose $D = (X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2 (X - j^2)^2$ et $C_n = (X + 1)^n - X^n - 1$.

D'après le cours, D divise C_n si et seulement si $C_n(j) = C_n'(j) = C_n(j^2) = C_n'(j^2) = 0$.

Comme est à coefficients réels et $j^2 = \bar{j}$, $C_n(j) = C_n'(j) = 0 \implies C_n(j^2) = C_n'(j^2) = 0$.

On remarque que $1 + j = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc

$$\begin{aligned} (C_n'(j) = 0) &\Leftrightarrow n(e^{i\frac{\pi}{3}})^{n-1} - n(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{n-1} = 0 \Leftrightarrow (e^{i\frac{\pi}{3}})^{n-1} = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{n-1} \\ &\Leftrightarrow 1 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{n-1} \Leftrightarrow 1 = e^{i\frac{(n-1)\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid \frac{(n-1)\pi}{3} = k2\pi \end{aligned}$$

On a donc $C_n'(j) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 1 + 6k$.

Si $n = 1 + 6k$, alors $C_n(j) = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{1+6k} - (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{1+6k} - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 = 0$.

On en déduit que D divise C_n si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z} \mid n = 1 + 6k$.

Exercice 4 Calculer, pour x réel, $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Solution de l'exercice: • Si $x \not\equiv 0 [2\pi]$

$$\text{On a } S = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(e^{ikx}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right) \text{ car } e^{ix} \neq 1.$$

$$\text{Or } \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = e^{inx/2} \times \frac{(-2i) \sin((n+1)x/2)}{(-2i) \sin(x/2)}.$$

$$\text{On en déduit que } S = \frac{2 \cos(nx/2) (\sin(n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

• Si $x \equiv 0 [2\pi]$ alors $S = n + 1$.

Exercice 5 (Centrale): Pour θ réel et n entier naturel non nul, On pose $P_n = X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1$.

1. Déterminer les racines complexes de $X^2 - 2 \cos(\theta) X + 1$.

2. On suppose que θ n'est pas multiple de π .

(a) Donner la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) En déduire la décomposition en irréductible de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Même question si θ est multiple de π .

Solution de l'exercice:

1 Le calcul du discriminant donne $\Delta = -4 \sin^2(\theta) = (2i \sin(\theta))^2$ donc (après calculs)

on a $X^2 - 2 \cos(\theta) X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ (valable pour $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$).

2a: θ n'est pas multiple de π donc $\Delta < 0$.

D'après Q1, $X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X^n - e^{i\theta})(X^n - e^{-i\theta})$. On a donc $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow z^n = e^{i\theta}$ ou $z^n = e^{-i\theta}$

• l'équation $z^n = e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$ admet n racines complexes **non réelles** égales à $e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}$ (noté z_k , $0 \leq k \leq n-1$)

• l'équation $z^n = e^{-i\theta} \Leftrightarrow z = e^{i(-\frac{\theta}{n} - k\frac{2\pi}{n})} = z'_k$, $0 \leq k \leq n-1$

(ici, on préfère $-k\frac{2\pi}{n}$ à $+k\frac{2\pi}{n}$ pour avoir $z'_k = \overline{z_k}$, ce qui ne change rien puisque les valeurs $-k$ lorsque $0 \leq k \leq n-1$ sont $n-1$ entiers consécutifs.

$$X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) \prod_{k=0}^{n-1} (X - \overline{z_k}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k)(X - \overline{z_k}) \text{ donc}$$

$$2b: \text{D'où } X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2 \cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}) X + 1).$$

3: • Si $\theta = 2k\pi$, alors $X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X^n - 1)^2$. Or $z^n = 1 \Leftrightarrow z = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \omega_k$, $0 \leq k \leq n-1$.

Si n est pair, $n = 2p$, l'équation $z^n = 1$ admet deux solutions réelles $1 = \omega_0$ et $-1 = \omega_p$.

On obtient $X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X-1)^2 (X+1)^2 \prod_{k=1}^{p-1} (X^2 - 2 \cos(k\frac{2\pi}{n}) X + 1)^2$. (les ω_k , $1 \leq k \leq p-1$ ont

un argument entre 0 et π donc ne peuvent pas être conjugués deux à deux)

Si n est impair, $n = 2p+1$, cette équation admet une solution réelle $1 = \omega_0$.

$$\text{On obtient } X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X-1)^2 \prod_{k=1}^p (X^2 - 2 \cos(k\frac{2\pi}{n}) X + 1)^2.$$

• Si $\theta = \pi + 2k\pi$, alors $X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X^n + 1)^2$ et $z^n = -1 \Leftrightarrow z = e^{i(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n})} = \omega'_k$, $0 \leq k \leq n-1$.

Si n est pair, $n = 2p$, l'équation $z^n = -1$ n'admet pas de solution réelle.

$$\text{On obtient } X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = \prod_{k=0}^p (X^2 - 2 \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n}) X + 1)^2.$$

Si n est impair, $n = 2p+1$, l'équation $z^n = -1$ admet une solution réelle $-1 = \omega_p$.

$$\text{On obtient } X^{2n} - 2 \cos(\theta) X^n + 1 = (X+1)^2 \prod_{k=1}^p (X^2 - 2 \cos(\frac{(2k+1)\pi}{n}) X + 1)^2.$$

Exercice 6 Mines ponts: Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Montrer que si $k \in [[1, n]]$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

2. En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

3. En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Solution de l'exercice: 1: Si $k \in [[1, n]]$, $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}$.

$$2: \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^k \times 1^{n-1-k} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$3: \text{On en déduit que } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \times k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k}$$

$$\text{et donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = n \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} + n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 1^k 1^{p-k} = (1+1)^p = 2^p \text{ donc } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = 2^{n-2} n(n-1) + 2^{n-1} n.$$

Exercice 7 Centrale: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Montrer que z^2 est racine de P .
2. Montrer que les racines complexes sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P .
4. Déterminer les polynômes vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Solution de l'exercice: 1: Soit z une racine de P . On a donc $P(z^2) = P(z)P(z-1) = 0$ donc z^2 est racine de P .

2: Par le même raisonnement, $(z^2)^2 = z^4$ est racine de P , $(z^4)^2 = z^8$ est racine de P donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z^{2^n} est racine de P .

• Si $|z| > 1$, la suite $(|z^{2^n}|)$ est strictement croissante donc si $k \neq l$, alors $z^{2^k} \neq z^{2^l}$ donc P admet une infinité de racines.

• De même, si $0 < |z| < 1$, P admet une infinité de racines.

Un polynôme non nul admet un nombre fini de racines donc $|z| = 1$ ou $|z| = 0$.

3: Si z est racine de P alors $P((z+1)^2) = P(z+1)P(z) = 0$ donc $(z+1)^2$ est racine.

si 0 est racine de P , alors $(0+1)^2 = 1$ est racine et $(1+1)^2 = 4$ est racine ce qui contredit la question précédente.

4: Si z est racine de P alors $(z+1)^2$ est racine de P donc (d'après Q2 et 3) $|(z+1)^2| = 1$

On a donc $\begin{cases} |z+1| = 1 \\ |z| = 1 \end{cases}$. Posons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$ donc $x = -\frac{1}{2}$ et $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}}$ donc $z \in \{j, j^2\}$.

Il existe des entiers naturels α, β tels que $P = C(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$.

Réciproquement, posons $P = C(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta$.

On a $P(X^2) = C(X^2-j)^\alpha(X^2-j^2)^\beta$ et $j^3 = 1$ donc $j^4 = j$ donc $X^2-j = X^2-(j^2)^2 = (X-j^2)(X+j^2)$.

On a donc $\boxed{P(X^2) = C(X-j^2)^\alpha(X+j^2)^\alpha(X-j)^\beta(X+j)^\beta}$ (décomposition en irréductible).

Par ailleurs, $P(X)P(X-1) = C^2(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta(X-1-j)^\alpha(X-1-j^2)^\beta$.

Or $1+j+j^2 = 0$ donc $\boxed{P(X)P(X-1) = C^2(X-j)^\alpha(X-j^2)^\beta(X+j^2)^\alpha(X+j)^\beta}$.

D'après l'unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$,

on a $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ si et seulement si $C^2 = C$ ($C = 0$ ou $C = 1$) et $\alpha = \beta$.

Les solutions sont donc le polynôme nul et les polynômes $(X-j)^\alpha(X-j^2)^\alpha = (X^2+X+1)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (Mines telecom) Soit $n \in \mathbb{N}$.

A partir de l'égalité $(1+X)^{2n} = (1+X)^n \times (1+X)^n$, montrer que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.

Solution de l'exercice: D'une part $(1 + X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k$.

D'autre part $(1 + X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$ donc $(1 + X)^n \times (1 + X)^n = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=k} a_i a_j$ avec $a_j = \binom{n}{j}$.

(formule du coefficient d'un produit de polynômes).

On a donc $c_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$.

Exercice 9 (Mines telecom) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$ alors $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ en considérant deux ensembles disjoints de cardinal n .

Donner d'autres expressions de $\binom{2n}{n}$ comme somme de produits de deux coefficients binomiaux.

Solution de l'exercice: L'entier $\binom{2n}{n}$ est le nombre de parties P à n éléments de $[[1, 2n]]$.

Choisir une partie P à n éléments revient à choisir $X_1 = P \cap [[1, n]]$ et $X_2 = P \cap [[n+1, 2n]]$.

Soit $k \in [[0, n]]$. Les parties X telles que $\text{card}(X_1) = k$ et $\text{card}(X_2) = n - k$ sont au nombre de $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$:

il y a $\binom{n}{k}$ choix de X_1 et, pour chaque choix de X_1 , il y a $\binom{n}{n-k}$ choix de X_2 .

Comme k peut varier de 0 à n , il y a en tout $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k}$ parties X de cardinal n .

On en déduit que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Exercice 10 (Centrale 1)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on s'intéresse à l'existence d'un polynôme $R_k \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, R_k \left(x + \frac{1}{x} \right) = x^k + \frac{1}{x^k} : (\mathcal{E}_k)$$

1. Trouver $R_0 \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie (\mathcal{E}_0) , $R_1 \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie (\mathcal{E}_1) et $R_2 \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie (\mathcal{E}_2) .

2. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $(x + \frac{1}{x}) (x^k + \frac{1}{x^k})$.

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $R_k \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifie (\mathcal{E}_k) .

3. Soit P un polynôme de la forme $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{P(x)}{x^n} = Q \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Solution de l'exercice:

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

1: $R_0 = 1$ et $R_1 = X$ conviennent.

De plus $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ donc $R_2 = X^2 - 2$ convient.

2: Existence: Récurrence double:

$k = 1$ et $k = 2$ déjà vu.

Soit $k \geq 2$ et supposons R_{k-1} vérifie (\mathcal{E}_{k-1}) et R_k vérifie (\mathcal{E}_k) .

On a $(x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$ donc

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} = (x + \frac{1}{x})R_k(x + \frac{1}{x}) - R_{k-1}(x + \frac{1}{x}).$$

En posant $R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}$, on a bien $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = R_{k+1}(x + \frac{1}{x})$.

Unicité: Soit Q_k une solution de (\mathcal{E}_k) . On a $R_k(u) = Q_k(u)$ pour tout u de la forme $x^k + \frac{1}{x^k}$.

La fonction $x \mapsto x^k + \frac{1}{x^k}$ n'est pas constante et est continue sur $]0, +\infty[$ donc elle prend une infinité de valeur (TVI) donc $Q_k = R_k$.

3: Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On cherche à faire apparaître les expressions $x^k + \frac{1}{x^k}$.

$$\text{On a } \frac{P(x)}{x^n} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n}. \text{ Or } \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n} = \sum_{k'=2n-k}^{n-1} a_{2n-k} x^{n-k};$$

$$\bullet \text{ Supposons que } \forall k \in [[0, n-1]], a_{2n-k} = a_k. \text{ Alors } \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{n-k}.$$

$$\text{On a donc } \frac{P(x)}{x^n} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x^{k-n} + x^{n-k}) = a_n + \sum_{j=1}^n a_{n-j} (x^{-j} + x^j) = a_n + \sum_{j=1}^n a_{n-j} R_j(x + \frac{1}{x}) = Q(x + \frac{1}{x})$$

$$\text{avec } Q = a_n + \sum_{j=1}^n a_{n-j} R_j.$$

• Réciproquement, supposons $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{P(x)}{x^n} = Q(x + \frac{1}{x})$ avec Q polynôme.

$$\text{On a donc } P(x) = x^n Q(x + \frac{1}{x}) = x^n \sum_{k=0}^d b_k \left(x + \frac{1}{x}\right)^k.$$

Résumé de la suite:

- Développer $(x + \frac{1}{x})^k$ par le binôme et remarquer que les coefficients de x^i et $\frac{1}{x^i}$ sont identiques.

- En déduire que $x^n (x + \frac{1}{x})^k$, les coefficients de x^{n+i} et x^{n-i} sont identiques.

- En déduire que dans P les coefficients de x^{n+i} et x^{n-i} sont identiques.

- Faire un changement d'indice pour se ramener à $\forall k \in [[0, n-1]], a_{2n-k} = a_k$.

$$(\text{Par exemple } x^n (x + \frac{1}{x})^k = x^{n-k} (x^2 + 1)^k = x^{n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{2i} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^{n-k+2i}.)$$

Or $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$ donc les coefficient de x^{n-k+2i} et de $x^{n-k+2(k-i)} = x^{n+k-2i}$ sont égaux.

En posant $j = k - 2i$, les coefficient de x^{n-j} et de x^{n+j} sont égaux).

Exercice 11 (centrale) Soit $P = X^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ et x_1, x_2 et x_3 les racines complexes de P (comptées avec multiplicité).

Exprimer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ à l'aide des coefficients de P .

Solution de l'exercice: On a $P_3 = 1 \times (X - x_1)(X - x_1)(X - x_1)$

$$\text{donc } P = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c \\ x_1x_2x_3 = -d \end{cases}.$$

$$\text{Or } (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \text{ donc } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b^2 - 2c.$$