

Mardi 12 mai 2025 (algèbre linéaire)

Exercice 1 (ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}[A]$ l'ensemble des matrices $P(A)$ où P est un polynôme à coefficients réels quelconque.

1. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Citer le théorème de Cayley-Hamilton. En déduire que $\dim(\mathbb{R}[A]) \leq n$.

Dans la suite de l'exercice, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_3, A, A^2)$.
5. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\} = \mathbb{R}[A]$.

Solution de l'exercice:

Rappel 1 Si P et Q sont des polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(\lambda P)(A) = \lambda P(A); (P + Q)(A) = P(A) + Q(A) \text{ et } (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$$

1: On a $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbb{R}[A]$

Soit $M \in \mathbb{R}[A]$ et $N \in \mathbb{R}[A]$. Il existe P et Q polynômes tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$.

Si λ et μ sont des réels, $\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = (\lambda P + \mu Q)(A) \in \mathbb{R}[A]$.

On en déduit que $\mathbb{R}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie n^2 donc est de dimension finie.

2: Soit χ_A le polynôme caractéristique de A . On a $\chi_A(A) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton.)

Montrons que pour tout polynôme P , $P(A) \in \text{vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Posons $P = \chi_A \times Q + R$ avec $\deg(R) < n - 1$ (division euclidienne de P par χ_A)

donc $P(A) = (\chi_A Q + R)(A) = \chi_A(A) Q(A) + R(A) = R(A)$ car $\chi_A(A) = 0$.

donc $P(A) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i \in \text{vect}(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ car $\deg(R) \leq n - 1$.

3 Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

On a $A = I_3 + J$ et $I_3 J = J I_3 = J$ donc $A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} J^i \times I_3^{n-i}$.

donc $A^0 = I_3$, $A^1 = I_3 + J$ et si $n \geq 2$, $A^n = \sum_{i=0}^2 \binom{n}{i} J^i \times I_3^{n-i} = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4: Par définition, on a $\text{vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathbb{R}[A]$ et $\mathbb{R}[A] \subset \text{vect}(I_3, A, A^2)$ d'après la question Q2.

On a donc $\mathbb{R}[A] \subset \text{vect}(I_3, A, A^2)$ donc $\mathbb{R}[A] = \text{vect}(I_3, A, A^2)$.

5: Posons $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

• Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A \times A^i = A^i \times A$

donc $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{E}$

• On a $AM = MA \Leftrightarrow (I_3 + J)M = M(I_3 + J) \Leftrightarrow MJ = JM$.

(cette remarque permet de simplifier un peu les calculs car J est plus simple que A mais n'est pas indispensable)

Posons $M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$. On a $MJ = \begin{pmatrix} 0 & a & a+d \\ 0 & b & b+e \\ 0 & c & c+f \end{pmatrix}$ et $JM = \begin{pmatrix} b+c & e+f & h+i \\ c & f & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$MJ = JM \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0, b + c = 0, c + f = 0, b = f \text{ (ce qui équivaut à } c = b = f = 0) : L_1 \\ a = e + f, a + d = h + i, b + e = i \text{ (ce qui équivaut compte tenu de } L_1 \text{ à } a = e = i \text{ et } d = h \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que } \Leftrightarrow \exists (a, d, g) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & d & g \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + dJ + (g - d)J^2 = aI_3 + d(A - I_3) +$$

$$(g - d)(A - I_3)^2.$$

$$aI_3 + d(A - I_3) + (g - d)(A - I_3)^2 \in \mathbb{R}[A] \text{ donc } MJ = JM \implies M \in \mathbb{R}[A] \text{ donc } \mathcal{E} \subset \mathbb{R}[A].$$

On a donc bien $\mathcal{E} = \mathbb{R}[A]$.

Exercice 2 CCINP PSI 21:

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $rg(u) = n$.

(a) Montrer que $\ker(u) = \text{Im}(u)$.

(b) Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^{2n} dans laquelle la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $rg(u) = 2n$.

(a) Montrer que $\dim(\text{Im}(u^2)) \geq n$.

(b) En déduire que $\ker(u) = \text{Im}(u^2)$.

(c) Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^{3n} dans laquelle la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Solution de l'exercice: 1a: • Montrons $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

Soit $y \in \text{Im}(u)$ et $x \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $y = u(x)$. On a $u(y) = u(u(x)) = 0$ donc $y \in \ker(u)$ donc $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.

• Egalité des dimensions: On a $rg(u) = n$ donc, d'après le th du rang, $\dim(\ker(u)) = \dim(\text{Im}(u)) = n$

On en déduit que $\ker(u) = \text{Im}(u)$.

1b: Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $\ker(u) = \text{Im}(u)$. On a $e_i \in \text{Im}(u)$ donc $\exists f_i, u(f_i) = e_i$.

Montrons que $b = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ est une base de \mathbb{R}^{2n} . Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i f_i = 0$.

En appliquant u , on déduit que $\sum_{i=1}^n \mu_i e_i = 0$ (linéarité et $u(e_i) = 0$ et $u(f_i) = e_i$).

Or (e_1, \dots, e_n) est libre donc $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ et donc, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

La famille $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ est donc libre avec $2n$ éléments donc base de \mathbb{R}^{2n} .

Dans cette base, la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$.

2a: Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.

On a $\ker(v) = \text{Im}(u) \cap \ker(u) \subset \ker(u)$ et $\dim(\ker(u)) = n$ (th du rang) donc $\dim(\ker(v)) \leq n$.

Le théorème du rang appliqué à v donne

$$\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{Im}(v)) + \dim(\ker(v))$$

Or $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^2)$ (car $y \in \text{Im}(v) \iff \exists z \in \text{Im}(u), y = u(z) \iff \exists x \in \mathbb{R}^{3n}, y = u(u(x))$).

Or $rg(u) = 2n$ donc

$$\dim(\text{Im}(u^2)) = \dim(\text{Im}(u)) - \dim(\ker(v)) \geq 2n - n = n.$$

2b Soit $y \in \text{Im}(u^2)$ et $x \in \mathbb{R}^{3n}$ tel que $y = u^2(x)$.

On a $u(y) = u(u^2(x)) = 0$ donc $y \in \ker(u)$ donc $\boxed{\text{Im}(u^2) \subset \ker(u)}$.

Conclusion: $\text{Im}(u^2) \subset \ker(u)$ et $\dim(\text{Im}(u^2)) \geq n = \dim(\ker(u))$ donc $\ker(u) = \text{Im}(u^2) = n$.

2b Soit (e_1, \dots, e_n) une base de $\ker(u) = \text{Im}(u^2)$. On a $e_i \in \text{Im}(u^2)$ donc $\exists g_i, u^2(g_i) = e_i$.

Posons $f_i = u(g_i)$. On a donc $e_i = u(f_i)$.

Montrons que $b = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de \mathbb{R}^{2n} .

Supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i f_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i g_i = 0$.

En appliquant d'abord u^2 , on obtient $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$, puis, en appliquant u , on obtient $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ donc $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est libre avec $3n$ éléments donc base de \mathbb{R}^{2n} . Dans

cette base, la matrice de u est égale à $\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Exercice 3 (Ccinp) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$. Donner une expression factorisée du déterminant de $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice: On a $\det(A) = abc \times \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = abc \times V(a, b, c) = abc(c-a)(c-b)(b-a)$.

Exercice 4 (Ccinp): Soient A et B deux matrices carrées réelles d'ordre n .

On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P soit de degré non nul et vérifie $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.

1. Etablir que A est inversible.

2. En déduire A et B commutent.

Solution de l'exercice: 1: On pose $P = 1 + \sum_{i=1}^l a_i X^i$.

On a $AB = P(A) = I_n + \sum_{i=1}^l a_i A^i$ donc $I_n = AB - \sum_{i=1}^l a_i A^i = A \left(B - \sum_{i=0}^{l-1} a_{i+1} A^i \right)$

donc A est inversible et $A^{-1} = B - \sum_{i=0}^{l-1} a_{i+1} A^i$.

2: On a $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ avec $A^{-1}A = \left(B - \sum_{i=0}^{l-1} a_{i+1} A^i \right) A = BA - \sum_{i=1}^l a_i A^i$

et $AA^{-1} = A \left(B - \sum_{i=0}^{l-1} a_{i+1} A^i \right) = AB - \sum_{i=1}^l a_i A^i$ donc $BA = AB$.

Exercice 5 (Ccinp) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la famille $\left(X^k (X + \alpha)^{n-k} \right)_{k \in [[0, n]]}$ est base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.

2. Soit a et b deux complexes distincts. Montrer que la famille $\left((X - a)^k (X - b)^{n-k} \right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.

Solution de l'exercice:

1 Posons $P_k = X^k (X + a - b)^{n-k}$.

En développant par le binôme $P_k = (a - b)^{n-k} X^k + Q_k$ avec $\deg(Q_k) \geq k + 1$.

On en déduit que la matrice de la famille (P_k) dans la base canonique est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls donc est inversible.

La famille $(P_k)_{k \in [[0, n]]}$ est donc base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.

2: Posons $Q_k = P_k(X + a)$.

On a $\sum_{k=0}^n \lambda_k Q_k = 0 \implies \forall z \in \mathbb{C} \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(z + a) = 0 \implies \forall z \in \mathbb{C} \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(z) = 0 \implies \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$.

On déduit de Q1 que $\forall k, \lambda_k = 0$ donc la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre et a $n + 1$ éléments donc est une base de $\mathbb{C}_n[\mathbb{X}]$.

Exercice 6 (Mines ponts) Soient $n \geq 2$, $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$ et $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$.

1. Les ensembles H et N sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que $N \subset H$.
3. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant N .

Solution de l'exercice: Q1: • On a $H = \ker(\text{tr})$ et $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle donc H est un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour $n = 2$, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = B^2 = 0$ donc $(A, B) \in N^2$.

Or $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 donc inversible donc $A + B \notin N$ donc N n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Pour n quelconque, posons $A_n = \begin{pmatrix} A & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$.

Le calcul par blocs donne $A_n^2 = B_n^2 = 0$ donc $(A_n, B_n) \in N^2$.

$A_n + B_n = \begin{pmatrix} A+B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$ donc $(A_n + B_n)^k = \begin{pmatrix} (A+B)^k & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \neq 0$ d'après le cas $n = 2$.

On a donc $A_n + B_n \notin N$ donc N n'est pas un sous-espace vectoriel.

2 On a $N \subset H$ car si $M \in N$, alors $\text{sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 0\} = \{0\}$ et M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle. On a donc $N \subset H$.

3: • On sait que H est un sous-espace vectoriel contenant N et que $\dim(H) = n^2 - 1$.

• Montrons que tout sous espace vectoriel que contient N contient H .

Pour cela, montrons que N contient une famille libre de $n^2 - 1$ éléments.

- La famille $(E_{i,j})_{i \neq j}$ est une famille libre de $n^2 - n$ éléments de N (car de carré nul).

- Pour $n = 2$, la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$ ce qui donne l'idée qui suit

- Plus généralement, donc si $2 \leq i \leq n$, la matrice $F_i = -E_{1,1} - E_{i,1} + E_{1,i} + E_{i,i}$ vérifie $F_i^2 = 0$ donc est élément de N :

(faire le produit matriciel ou montrer que F_i est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-2,n-2} \end{array} \right)$ en inversant le $2^{\text{ème}}$ vecteur et le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base)

Montrons que la famille $\mathcal{F} = ((E_{i,j}(i \neq j)), (F_j(2 \leq j \leq n)))$ est libre.

Supposons $\sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^n \lambda_i F_i = 0$.

En utilisant $F_i = -E_{1,1} - E_{i,1} + E_{1,i} + E_{i,i}$ on aboutit à une expression $\sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j} \beta_{i,j} E_{i,j} + \gamma E_{1,1} + \sum_{i=2}^n \lambda_i E_{i,i} = 0$

donc, par liberté de la famille des matrices élémentaires, $\forall i \in [[2, n]]$, $\lambda_i = 0$.

On a donc $\sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2, i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$. donc, par liberté de la famille des matrices élémentaires, $\forall i \in [[1, n]]^2$

tel que $i \neq j$, on a $\alpha_{i,j} = 0$.

la famille \mathcal{F} est donc libre. et admet $n^2 - 1$ éléments de N donc de H qui est de dimension $n^2 - 1$ donc engendre H .

donc tout sous-espace vectoriel contenant N contient H qui est donc le plus petit sous espace vectoriel contenant N .

Exercice 7 (Mines ponts): Soit a_0, \dots, a_n des complexes. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) : $a_0 \neq 0$

(ii) : $\forall Q \in \mathbb{C}_n[X], \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \mid Q = \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$.

Solution de l'exercice:

Soit $u : P \mapsto \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$. est linéaire (ii) : $\forall Q \in \mathbb{C}_n[X], \exists P \in \mathbb{C}_n[X] \mid Q = u(P) \iff u$ surjective $\iff u$ bijective (dim finie).

Or $A = \text{mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(u) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 2 & & n!a_n \\ & a_0 & 2a_1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n(n-1)a_2 \\ & & & & na_1 \\ & & & & a_0 \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$

donc (ii) $\iff u$ bijective $\iff A$ est inversible $\iff a_0 \neq 0$.

Autre méthode (Abel):

On a $u(P) = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k P^{(k)} = 0 \iff a_0 P = -\sum_{k=1}^n a_k P^{(k)}$

Supposons $a_0 \neq 0$. Si $P \neq 0$, alors $\deg(a_0 P) = \deg(P)$ et $\deg\left(-\sum_{k=1}^n a_k P^{(k)}\right) < \deg(P)$ donc $P \notin \ker(u)$ donc $\ker(u) = \{0\}$.

On a donc u injectif et endomorphisme de dimension finie donc u est bijectif donc surjectif.

Supposons $a_0 = 0$. On a $u(1) = 0$ donc $\ker(u) \neq \{0\}$. donc u n'est pas bijectif donc pas surjectif.

Conclusion: (ii) $\iff u$ surjectif $\iff a_0 \neq 0$.

Exercice 8 (*X psi*) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r avec $0 < r < n$. Montrer qu'il existe $(P_1, P_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ telle que $P_1 M P_2$ soit égale à la matrice définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right)$ ou I_r est la matrice carrée identité de taille r .
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant: $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Montrer que A n'est pas inversible.
3. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

Solution de l'exercice:

1: Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M et b_0 la base canonique de \mathbb{R}^n .

Soit H un supplémentaire de $\ker(f)$ dans \mathbb{R}^n . Par le théorème du rang, $\dim(H) = r$.

Soit (u_1, \dots, u_r) une base de H et si (u_{r+1}, \dots, u_n) une base de $\ker(f)$.

On a $\mathbb{R}^n = H \oplus \ker(f)$ donc la famille $b_1 = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de \mathbb{R}^n .

D'après le cours, $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ donc $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension r donc $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

On complète la famille libre $(f(u_1), \dots, f(u_r))$ en une base b_2 de \mathbb{R}^n .

Par construction, on a $\text{mat}_{b_1, b_2}(f) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right) = Q^{-1} M P =$ avec $Q = P_{b_0 \rightarrow b_2}$ et $P = P_{b_0 \rightarrow b_2}$ ce qui entraîne le résultat demandé.

2: Supposons que A vérifie: $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

On a alors $\det(2A) = \det(A+A) = \det(A) + \det(A)$ donc $\boxed{\det(2A) = 2 \det(A)}$.

D'autre part d'après le cours, $\boxed{\det(2A) = 2^n \det(A)}$.

Or $n \geq 2$ donc $2^n \neq 2$ donc $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

3: On en déduit que A est de rang $r < n$. D'après Q1,

Si $A \neq 0$, alors il existe $(P_1, P_2) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $P_1 A P_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right)$

c'est-à-dire $A = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & 0_{n-r, n-r} \end{array} \right) P_2^{-1}$.

Posons $B = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0_{r, r} & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & I_{n-r} \end{array} \right) P_2^{-1}$. Les matrices A et B ne sont pas inversibles donc $\det(A) + \det(B) = 0$.

On a $A + B = P_1^{-1} \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r, n-r} \\ \hline 0_{n-r, r} & I_{n-r} \end{array} \right) P_2^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1}$ qui est inversible donc $\det(A + B) \neq 0$.

On en déduit que $A = 0$.

La matrice nulle vérifie bien la propriété demandée et est donc la seule solution du problème posé.