

# Mercredi 13 mai 2026 matin (réduction)

**Exercice 1** (ccinp) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $4A^2 + 2A + I_n = 0$ .

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?
2. Calculer  $\det(A)$  et  $\text{tr}(A)$ .

**Solution de l'exercice**

1: Soit  $P = 4X^2 + 2X + 1$  admet deux racines complexes distinctes  $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$  donc  $A$  est diagonalisable dans

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{\frac{1}{2}j, \frac{1}{2}\bar{j}\}$ .

On a  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  donc  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2: D'après Q1,  $A$  est semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à  $D = \text{diag} \left( \underbrace{\frac{1}{2}j, \dots, \frac{1}{2}j}_{n_1}, \underbrace{\frac{1}{2}\bar{j}, \dots, \frac{1}{2}\bar{j}}_{n_1} \right)$

avec  $n_1 = m(\frac{1}{2}j)$  et  $n_2 = m(\frac{1}{2}\bar{j})$ .

On a  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donc  $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$  donc  $m(\frac{1}{2}j) = m(\frac{1}{2}\bar{j})$  donc  $n_1 = n_1$  donc  $n$  est pair. Posons  $n = 2p$ .

On a  $\det(A) = (\frac{1}{2}j)^p \times (\frac{1}{2}\bar{j})^p = (\frac{1}{2})^n$  car  $j \times \bar{j} = |j|^2 = 1$  et  $\text{tr}(A) = p \times \frac{1}{2}j + p \times \frac{1}{2}\bar{j} = \frac{n}{4}$ .

**Exercice 2** (Ccinp): Soit  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  des complexes.

1. Déterminer le rang de  $M - I_n$ .
2. En déduire que  $M - I_n$  est semblable à une matrice admettant  $n - 1$  colonnes nulles.
3. Calculer le déterminant de la matrice  $M$ .

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}.$$

**Solution de l'exercice:**

On a  $M - I_n = A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & & x_ny_n \end{pmatrix}$  de colonnes proportionnelles à  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

La matrice  $A$  est de rang 0 ou 1 donc  $\dim(\ker(A)) \geq n - 1$ .

Soit  $u$  canoniquement associé à  $A$ . En complétant une base de  $\ker(u)$  en une base de  $\mathbb{R}^n$ , on obtient une base  $b$

dans laquelle  $\text{mat}(u)$  est de la forme  $A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z_1 \\ \vdots & & \vdots & z_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{pmatrix}$

Il existe donc une matrice carrée  $P$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  soit de la forme  $A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & z_1 \\ \vdots & & \vdots & z_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z_n \end{pmatrix}$ .

Or  $\text{tr}(A') = \text{tr}(A)$  donc  $z_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ .

On a  $P^{-1}BP = I_n + P^{-1}AP$  donc  $\det(B) = \det(P^{-1}BP) = 1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$ .

**Exercice 3** CCINP: Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$ ,  $l$  une forme linéaire non nulle de  $E$  et  $a$  un vecteur non nul de  $E$ . On définit l'application  $f$  de  $E$  dans  $E$  définie par  $f(x) = l(a)x - l(x)a$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Calculer  $f(a)$ .
3. Déterminer un polynôme annulateur de  $f$ . Que peut-on en déduire si  $l(a) \neq 0$ ?
4. Déterminer les éléments propres de  $f$ . Que peut-on en déduire si  $l(a) = 0$ ?

**Solution de l'exercice:**

1) Découle de la linéarité de  $l$ .

2: On a  $f(a) = 0$ .

3: • On a  $f(f(x)) = f(l(a)x - l(x)a) = l(a)f(x) - l(x)f(a) = l(a)f(x)$  d'après Q2. On en déduit que,  $\forall x \in E, f^2(x) - l(a)f(x) = 0_E$  donc  $f^2 - l(a)f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Le polynôme  $P = X^2 - l(a)X = X(X - l(a))$  est un polynôme annulateur de  $f$ .

• Supposons  $l(a) \neq 0$ . Le polynôme annulateur  $P$  est scindé à racines simple ( $l(a) \neq 0$ ) donc  $f$  est diagonalisable.

4: D'après Q2,  $0 \in sp(f)$  et  $a \in E_0(f)$ . D'après Q3,  $sp(f) \subset \{0, l(a)\}$

De plus,  $l$  étant une forme linéaire non nulle,  $\ker(l)$  est un sous-espace de dimension  $n - 1 \geq 1$ .

Si  $x \in \ker(l)$ ,  $f(x) = l(a)x$  donc  $l(a) \in sp(f)$  et  $\ker(l) \subset E_{l(a)}(f)$ .

L'inclusion réciproque est immédiate donc  $\ker(l) = E_{l(a)}(f)$

• Supposons  $l(a) \neq 0$ . On a  $\dim(E_0(f)) \geq 1$  et  $\dim(E_{l(a)}(f)) = n - 1$  et  $\dim(E_0(f)) + \dim(E_{l(a)}(f)) \leq \dim(E)$  donc  $\dim(E_0(f)) = 1$  et donc  $E_0(f) = \text{vect}(a)$ .

• Supposons  $l(a) = 0$  Le polynôme  $P$  admet 0 comme une unique racine et  $\ker(l) = E_{l(a)}(f)$  donc  $\dim(E_0(f)) = n - 1$  donc  $f$  n'est pas diagonalisable.

**Exercice 4** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$  inversible. Montrer qu'il existe un polynôme  $P$  tel que  $A^{-1} = P(A)$ .

**Solution de l'exercice:** La matrice  $A$  admet un polynôme annulateur non nul  $Q$ . Posons  $Q = \sum_{i=0}^d a_i X^i$ .

• Si  $a_0 \neq 0$ , alors  $a_0 I_n = -\sum_{i=1}^d a_i A^i$  donc  $a_0 I_n = A \times -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^d a_i A^{i-1} = A \times P(A)$  avec  $P = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^{d-1} a_{i+1} A^i$ .

• Si  $a_0 = 0$ . Le polynôme  $Q$  étant non nul, il admet au moins un coefficient non nul.

On peut écrire  $Q$  sous forme  $Q = \sum_{i=k}^d a_i X^i$  avec  $a_k \neq 0$ . On a  $\sum_{i=k}^d a_i A^i = 0$  donc  $A^k \sum_{i=k}^d a_i A^{i-k} = 0$ .

Or donc  $A^k$  est inversible donc  $\sum_{i=k}^d a_i A^{i-k} = 0$  donc  $R(A) = 0$  avec  $R = \sum_{i=0}^{d-k} b_i A^i$  avec  $b_i = a_{i+k}$  et donc  $b_0 \neq 0$  et on est ramené au cas déjà traité.

Remarque: On peut aussi utiliser le th de Cayley-Hamilton qui est annulateur et dont le coefficient constant  $(-1)^n \det(A)$  est non nul

**Exercice 5** (ccinp): Soit  $n$  un entier,  $n \geq 3$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $a_{i,1} = i$  pour  $i \in [[1, n]]$ ,  $a_{1,j} = j$  pour  $j \in [[1, n]]$  et  $a_{i,j} = 0$  sinon.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ .

1. Déterminer le rang de  $A$  et la dimension de  $\ker(A)$ .
2.  $A$  est-elle diagonalisable? Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0?
3. Déterminer le plus petit sous-espace stable par  $f$  contenant  $e_1$ .  
On note ce sous-espace  $F$  et  $f_F$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ .

4. Déterminer le spectre de  $f_F$ . En déduire le spectre de  $A$ .

5. Donner un polynôme non nul vérifiant  $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

**Solution de l'exercice:** 1: Les colonnes  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas colinéaires et si  $j \geq 3$ ,  $C_j$  est colinéaire à  $C_2$  donc  $rg(A) = 2$ .

Le théorème du rang donne  $\dim(\ker(A)) + rg(A) = n$  donc  $\dim(\ker(A)) = n - 2 > 0$  car  $n \geq 3$ .

2: La matrice  $A$  est symétrique réelle car  $a_{i,1} = i = a_{1,i}$  et si  $i \neq 1$  et  $j \neq 1$ ,  $a_{i,j} = 0 = a_{j,i}$  donc  $A$  est diagonalisable.

On a  $\ker(A - 0I_n) = \ker(A) \neq \{0\}$  donc 0 est valeur propre et  $\dim(E_0(A)) = \dim(\ker(A)) = n - 2$ .

La matrice  $A$  est diagonalisable donc la multiplicité de 0 est égale à la dimension du sous-espace propre  $E_0(A)$  donc égale à  $n - 2$ .

3: La matrice  $A$  est diagonalisable donc son polynôme caractéristique est scindé. Soit  $\lambda$  et  $\mu$  les deux valeurs propres restantes (comptées avec multiplicités donc non nécessairement distinctes).

On a  $tr(A) = 1 = (n - 2) \times 0 + \lambda + \mu$  donc  $\mu = 1 - \lambda$ .

• Soit  $f$  canoniquement associé à  $A$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On a  $f(e_1) = \sum_{i=1}^n i e_i \notin \text{vect}(e_1)$  car  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$  ne sont pas colinéaires.

Posons  $e'_2 = f(e_1)$ .

On a  $f(e'_2) = f(f(e_1)) = \sum_{i=2}^n i f(e_i) = e'_2 + \left(\sum_{i=2}^n i^2\right) e_1$ .

On en déduit que  $F = \text{vect}(e_1, e'_2)$  est un plan vectoriel stable par  $f$ .

Si  $F'$  est un sous espace stable par  $f$  contenant  $e_1$ .

On a  $f(e_1) \in F'$  donc  $F'$  contient  $F$

4: **Spectre de  $f_F$**  :

Soit  $f_F$  est l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ , on a  $\text{mat}_{(e_1, e'_2)}(f_F) = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=2}^n i^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$ .

On a  $\chi_B(x) = x^2 - x - \sum_{i=2}^n i^2$  de discriminant  $\sqrt{1 + 4 \sum_{i=2}^n i^2} > 0$  donc  $\chi_B$  admet deux racines distinctes  $\lambda_i =$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \sum_{i=2}^n i^2}}{2}, i \in \{1, 2\}.$$

et  $sp(f_F) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ .

• **Méthode simple:**

On a  $\lambda_i \neq 0$  car  $\sqrt{1 + 4 \sum_{i=2}^n i^2} \neq 1$  donc  $f$  admet trois valeurs propres distinctes  $0, \lambda_1, \lambda_2$ .

La multiplicité de la la valeur propre  $m(0) \geq \dim E_0(f) = n - 2$  et  $m(\lambda_i) \geq 1$ .

Or la somme des multiplicité des valeurs propres est inférieure ou égale à  $n$  donc

il n'existe pas d'autre valeurs propres et  $m(0) = \dim E_0(f) = n - 2$  et  $m(\lambda_i) = 1$ .

Conclusion:  $sp(A) = sp(f) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ .

• **Méthode compliquée (mais très classique dans des cas moins simples)**

On a  $\det(B) \neq 0$  donc  $f_F$  est bijectif donc  $F \cap \ker(f) = \{0\}$ . et  $\dim(F) + \dim(\ker(f)) = n$

donc  $F \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^n$ .

Soit  $(e'_3, \dots, e'_n)$  une base de  $\ker(f)$ . La famille  $b = (e_1, e'_2, e'_3, \dots, e'_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  et  $\text{mat}_b(f) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On en déduit que  $\chi_A(x) = \chi_f(x) = \begin{vmatrix} xI_2 - B & 0 \\ 0 & xI_{n-1} \end{vmatrix} = x^{n-2} \times \chi_B(x)$ .

**Remarque:** On aurait pu remplacer  $(e_1, e'_2)$  par  $(u_1, u_2)$  avec  $u_i$  vecteur propre de  $f_F$  associé à  $\lambda_i$  dans le

raisonnement précédent, ce qui permet de diagonaliser la matrice.

4:  $A$  est diagonalisable donc  $\prod_{\lambda \in \text{sp}(A)} (X - \lambda)$  est un polynôme annulateur de  $A$

donc  $X(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X \left( X^2 - X - \sum_{i=2}^n i^2 \right)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Exercice 6 Centrale PSI:** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

1. La matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle diagonalisable? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables?

2. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels de degré  $n$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si il existe  $c > 0$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\text{Im}(z)|^n$ .

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Montrer que s'il existe  $(A_k)$  une suite de matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui converge vers une matrice  $A$ , alors le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé dans  $\mathbb{R}[X]$ .

4. Etablir la réciproque de la question précédente.

5. Que peut-on déduire des questions 3 et 4?

**Solution de l'exercice:** 1: On a  $\text{sp}(T) = \{1\}$  donc si  $T$  était diagonalisable, elle serait semblable à  $I_3$  donc égale à  $I_3$ , ce qui n'est pas le cas donc  $T$  n'est pas diagonalisable.

Soit  $T_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 + \frac{1}{k} & 2 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{2}{k} \end{pmatrix}$  On a  $\text{sp}(T_k) = \{1, 1 + \frac{1}{k}, 1 + \frac{2}{k}\}$  donc  $T_k$  admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et on a bien  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T$ .

2: Supposons qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\text{Im}(z)|^n$ . Si  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors  $|\text{Im}(z)| > 0$  donc  $|P(z)| > 0$  donc  $P$  n'admet pas de racines complexes non réelles donc est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

Supposons que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  de décomposition en irréductibles  $P = \lambda \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{\alpha_i}$  avec  $a_i \in \mathbb{R}$ . On a

$$|P(z)| = \left| \lambda \prod_{i=1}^k (z - a_i)^{\alpha_i} \right| = |\lambda| \prod_{i=1}^k |z - a_i|^{\alpha_i} \quad \text{Posons } z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a  $|z - a_i| = |(x - a_i) + iy| \geq |y|$  donc  $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq c |\text{Im}(z)|^n$  où  $c$  est la valeur absolue du coefficient dominant de  $P$ .

3: Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On a, par continuité du déterminant,  $\chi_{A_k}(z) = \det(zI_n - A_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \det(zI_n - A) = \chi_A(z)$ . Or  $|\chi_{A_k}(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$  donc par passage à la limite quand  $k$  tend vers l'infini, donc  $|\chi_A(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$  donc  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

4: Supposons  $\chi_A$  scindé. Il existe donc  $T$  triangulaire supérieure semblable à  $A$ .

Soit  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $T = P^{-1}AP$ .

Soit  $T_k$  la matrice de taille  $n$  de même coefficients que  $T$  sauf  $T_k[i, i] = T[i, i] + \frac{i}{k}$ .

On a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k[i, i] = T[i, i]$  donc  $(T_k)$  converge vers  $T$ .

Montrons qu'à partir d'un certain rang,  $T_k[i, i] = T[i, i]$  est diagonalisable:

La matrice  $T_k[i, i] = T[i, i]$  est triangulaire de spectre  $\{T_k[i, i]\}$ .

Soit  $i \neq j$ .

Premier cas:  $T[i, i] \neq T[j, j]$ . On a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k[i, i] = T[i, i]$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k[j, j] = T[j, j]$  donc il existe un rang à partir duquel  $T_k[i, i] \neq T_k[j, j]$ .

Deuxième cas:  $T[i, i] = T[j, j]$  On a  $T_k[i, i] \neq T_k[j, j]$  pour tout  $k$ .

Pour  $k$  supérieur au maximum des rangs obtenus précédemment,  $T_k[i, i] \neq T_k[j, j]$  donc  $T_k$  est diagonalisable.

Posons  $A_k = PT_kP^{-1}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_k = T$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_k = PTP^{-1} = A$  et  $(A_k)_{k \geq M}$  est une suite de matrices diagonalisables.

5: Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables