

Mercredi 13 mai 2026 après midi (réduction)

Exercice 1 CCINP PSI: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f(M) = aM + bM^T.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-ensembles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques (respectivement antisymétriques).

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

2. Vérifier que f est un endomorphisme.

3. Montrer que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

4. Déterminer la trace et le déterminant de f .

Solution de l'exercice: .

1a: voir cours

1b: Voir cours: $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$

2: La transposition est linéaire donc f est linéaire.

3: Si $b = 0$, $f = a \text{ id}$ donc f est diagonalisable et $sp(f) = \{a\}$.

Si M est symétrique alors $M^T = M$ donc $f(M) = (a+b)M$

donc $a+b$ est valeur propre et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a+b}(f)$.

Si M est antisymétrique alors $M^T = -M$ donc $f(M) = (a-b)M$

donc $a-b$ est valeur propre et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset E_{a-b}(f)$.

On sait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \oplus \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc

$\dim(E_{a+b}(f)) + \dim(E_{a-b}(f)) \geq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ donc f est diagonalisable.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$,

- il n'y a pas d'autres valeurs propres

- et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_{a+b}(f)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{a-b}(f)$.

(on peut aussi juxtaposer des base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ comme dans Q2).

3: On sait que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc si b est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et b' une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors (b, b') est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice de f dans cette base est diagonale et en calculant la trace de la matrice A de f dans cette base, on obtient

$$tr(f) = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) \text{ et } \det(f) = (a+b)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a-b)^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ (valable aussi si } b=0\text{)}.$$

Exercice 2 Mines telecom: Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi : \begin{cases} E \rightarrow E \\ P \mapsto P(1-X) \end{cases}$.et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme. Ecrire la matrice A de φ dans la base canonique de E .

2. L'endomorphisme φ est-il bijectif?

3. Déterminer un polynôme annulateur de φ .

4. Donner les éléments propres de φ .

5. Généraliser les questions précédentes à $E = \mathbb{R}_n[X]$.

6. En déduire la valeur de $\sum_{k=i}^j (-1)^{i+k} \times \binom{k}{i} \times \binom{j}{k}$ pour $0 \leq i \leq j \leq n-1$.

Solution de l'exercice:

1: $\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + \mu Q(1 - X) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$.

De plus,
$$\begin{cases} \varphi(1) = 1 \\ \varphi(X) = 1 - X \\ \varphi(X^2) = (1 - X)^2 = 1 - 2X + X^2 \\ \varphi(X^3) = (1 - X)^3 = 1 - 3X + 3X^2 - X^3 \end{cases} \quad \text{donc } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2: La matrice A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls donc est inversible donc φ est bijective.

3: Si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, alors $\varphi(P) = a_0 + a_1(1 - X) + a_2(1 - X)^2 + a_3(1 - X)^3$ donc

$$\varphi(\varphi(P)) = a_0 + a_1(1 - (1 - X)) + a_2(1 - (1 - X))^2 + a_3(1 - (1 - X))^3 = P.$$

On en déduit que $\varphi \circ \varphi(P) = P$ donc $\varphi^2 = id_E$ donc $A^2 = I_4$ donc $A^{-1} = A$.

4: De plus, $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de φ donc

φ est diagonalisable et $sp(\varphi) \subset \{-1, 1\}$.

Première méthode: résoudre $AU = U$ et $AU = -U$ avec $U \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

Deuxième méthode: deviner des vecteurs propre:

On remarque que

$$\varphi(1) = 1 \text{ donc } 1 \in E_1(\varphi).$$

$$\varphi\left(X - \frac{1}{2}\right) = (1 - X) - \frac{1}{2} = -X + \frac{1}{2} = -\left(X - \frac{1}{2}\right) \text{ donc } X - \frac{1}{2} \in E_{-1}(\varphi).$$

$$\varphi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = -\left(\left(1 - X\right) - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ donc } \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 \in E_1(\varphi) \text{ et de même } \left(X - \frac{1}{2}\right)^3 \in E_{-1}(\varphi).$$

$$\text{On a donc } \text{vect}\left(1, \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) \subset E_1(\varphi) \text{ et } \text{vect}\left(X - \frac{1}{2}, \left(X - \frac{1}{2}\right)^3\right) \subset E_{-1}(\varphi)$$

donc $\dim(E_1(\varphi)) \geq 2$ et $\dim(E_{-1}(\varphi)) \geq 2$.

Or $\dim(E_1(\varphi)) + \dim(E_{-1}(\varphi)) \leq 4$ donc $\dim(E_1(\varphi)) = \dim(E_{-1}(\varphi)) = 2$.

$$\text{De plus, } \text{vect}\left(1, \left(X - \frac{1}{2}\right)^2\right) = E_1(\varphi) \text{ et } \text{vect}\left(X - \frac{1}{2}, \left(X - \frac{1}{2}\right)^3\right) = E_{-1}(\varphi).$$

5: De même $\varphi(X^j) = (1 - X)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-X)^i \times 1^{n-i} = \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i} (-X)^i$ donc

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & -\binom{1}{0} & & -\binom{n}{1} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (-1)^n - \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a donc } a_{i+1,j+1} = \begin{cases} -(-1)^i \binom{j}{i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même $\varphi(\varphi(P)) = \varphi((P(1 - X))) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$ donc $\varphi^2 = id$ donc φ est diagonalisable et $sp(\varphi) = \{-1, 1\}$.

On vérifie de la même façon que si $0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $\varphi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i}\right) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i}$ et $0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$,

$$\varphi\left(\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i+1}\right) = -\left(X - \frac{1}{2}\right)^{2i+1}.$$

La famille $\left(\left(X - \frac{1}{2} \right)^i \right)_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de degrés échelonnés donc base de $\mathbb{C}_n[X]$ donc est une base de vecteur propres

On a $F = \text{vect} \left(\left(X - \frac{1}{2} \right)^{2i}, 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor \right) \subset E_1(\varphi)$

et $G = \text{vect} \left(\left(X - \frac{1}{2} \right)^{2i+1}, 0 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor \right) \subset E_{-1}(\varphi)$.

et $F \oplus G = \mathbb{C}_n[X]$ donc $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ donc $F = E_1(\varphi)$ et $G = E_{-1}(\varphi)$.

6 Posons $B = A^2$. Si $0 \leq i \leq j \leq n-1$,

$$\text{on a } b_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i+1,k+1} \times a_{k+1,j+1} = \sum_{k=i}^j (-1)^i \binom{k}{i} (-1)^k \binom{j}{k} = \sum_{k=i}^j (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \times \binom{j}{k}.$$

$$\text{Or } B = A^2 = I_2 \text{ donc } \sum_{k=i}^j (-1)^{i+k} \binom{k}{i} \times \binom{j}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Exercice 3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On suppose que $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est une matrice inversible.
2. En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Leftrightarrow X = 0$.
3. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = AX - XB$.

Solution de l'exercice

1. première méthode: Le polynôme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Posons $\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{sp}(A)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$.

On a $\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ et $(B - \lambda I_n)$ est inversible car λ n'est pas valeur propre de B .

Donc $\chi_A(B)$ est inversible comme produit de matrices inversibles..

deuxième méthode: Toute matrice carrée complexe est trigonalisable donc

il existe P inversible et T triangulaire supérieure $T = P^{-1}BP$.

On a $T^k = P^{-1}B^kP$ donc $\chi_A(T) = P^{-1}\chi_A(B)P$.

La matrice $\chi_A(T)$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les $\chi_A(t_{i,i})$.

Or $\text{sp}(B) = \text{sp}(T) = \{t_{i,i}\}$ et $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \emptyset$ donc $\chi_A(t_{i,i}) \neq 0$.

Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls est inversible donc $\chi_A(T)$ est inversible donc $\chi_A(B)$ est inversible.

2. Supposons $AX = XB$. On a $A^2X = XB \Rightarrow AAX = AXB = XBB = XB^2$.

Par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}, A^kX = XB^k$ et

par combinaison linéaire, $\boxed{\text{pour tout } Q \in \mathbb{C}[X], Q(A)X = XQ(B)}$.

En particulier, $\chi_A(A) \times X = X \times \chi_A(B)$. Or $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton) donc $X \times \chi_A(B) = 0$.

En multipliant à gauche par l'inverse de $\chi_A(B)$, on en déduit que $X = 0$.

3. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(X) = AX - XB$. On vérifie que φ est linéaire. D'après la question 2, φ est injective.

Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie donc φ est un isomorphisme.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une et une seule matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\varphi(X) = M$.

Exercice 4 (Centrale): Soit $x \in \mathbb{R}^n$ non nul. On note E_x l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant x comme vecteur propre. Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Solution de l'exercice:

1:- La matrice nulle est élément de E_x .

Soit $(A, B) \in E_x^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. tels que $Ax = \lambda x$ et $Bx = \mu x$. Soit t et u deux réels.

On a $(tA + uB)x = tAx + uBx = (t\lambda + u\mu)x$ donc $tA + uB \in E_x$

donc E_x est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2: On complète x en une base b de \mathbb{R}^n et on considère la matrice $P = P_{b_0}^b$ ou b_0 est la base canonique.

L'application $\phi : M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (vérification laissée au lecteur)

et $\phi(E_x)$ est l'ensemble E des matrices M telles que $m_{i,1} = 0$ pour tout $i \geq 2$.

On a $\dim(E_x) = \dim(E) = 1 + n \times (n - 1)$ (E est engendré par des matrices élémentaires $E_{i,j}$ avec $(i, j) \neq (l, 1)$ pour $l \geq 2$).

Exercice 5 ENS PSI 21: Soit $n \geq 2$. On appelle pseudo-inverse de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$AB = BA, A = ABA \text{ et } B = BAB$$

Pour toute matrice A , on note a l'endomorphisme canoniquement associé.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $rg(a) = rg(a^2) = r$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(a) \oplus \text{Im}(a)$. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$.

2. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un pseudo-inverse si et seulement si $rg(a) = rg(a^2)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un pseudo-inverse B et b l'endomorphisme canoniquement associé à B .

(a) Montrer que $a \circ b$ est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.

(b) Montrer que A admet un unique pseudo-inverse que l'on notera A^+ .

(c) Montrer que A^+ est un polynôme en A .

4. On suppose que A^+ existe et que $(\text{Im}(a))^\perp = \ker(a)$. Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le vecteur A^+y minimise la fonction $f : x \mapsto \|Ax - y\|^2$ sur \mathbb{R}^n et qu'il est le vecteur de norme minimale parmi tous les vecteurs qui minimise f .

Solution de l'exercice: 1: Montrons $\ker(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. Si $x \in \ker(a) \cap \text{Im}(a)$ alors $\exists t \in \mathbb{R}^n, x = a(t)$ et $a(x) = a^2(t) = 0$ On en déduit que $t \in \ker(a^2)$ Or $\ker(a) \subset \ker(a^2)$ et $rg(a) = rg(a^2)$ donc (th du rang) $\dim(\ker(a)) = \dim(\ker(a^2))$ donc $\ker(a) = \ker(a^2)$ donc $t \in \ker(a)$ donc $x = 0$ donc $\ker(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$. Le théorème du rang entraîne que $\mathbb{R}^n = \ker(a) \oplus \text{Im}(a)$. Soit \mathcal{B}_0 une base de $\ker(a)$ et \mathcal{B}_1 une base de $\text{Im}(a)$. La famille $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ est une base de \mathbb{R}^n et dans cette base, la matrice de a est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ avec $C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$

On a donc $rg(a) = rg(C) = r$ donc C est inversible.

2: Supposons que A admet un pseudo-inverse B . On a $AB = BA, A = ABA$ donc $A = A^2B$

D'après le cours; $rg(MN) \leq rg(M)$ donc $rg(A) \leq rg(A^2)$.

D'après le cours $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$ donc $\text{Im}(a^2) \subset \text{Im}(a)$ donc $rg(A^2) \leq rg(A)$ donc $rg(A) = rg(A^2)$.

Supposons que $rg(a) = rg(a^2)$. Soit $C \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$. Posons

$$B = P \left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}.$$

Les relations $\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$

permettent d'obtenir que $AB = BA, A = ABA$ et $B = BAB$.

3a: On a $B = BAB$ donc $BA = AB = ABAB = (AB)^2$ donc $a \circ b = b \circ a$ est un projecteur.

On a $\text{Im}(a \circ b) \subset \text{Im}(a)$. De plus $a = (a \circ b) \circ a$ donc $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ b)$ donc $\text{Im}(a \circ b) = \text{Im}(a)$.

De plus $\ker(a) \subset \ker(b \circ a)$ donc (th du rang) $\ker(a) = \ker(a \circ b)$.

On en déduit que $a \circ b$ est un projecteur sur $\text{Im}(a)$ parallèlement à $\ker(a)$.

3b: Première méthode: Les rôles de a et b sont symétriques donc

on a aussi $\text{Im}(a \circ b) = \text{Im}(b)$ et $\ker(b) = \ker(a \circ b)$.

D'après a: $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \ker(a)$ et dans une base \mathcal{B} adaptée à cette décomposition,

on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(a) = \left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(b) = \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

car b admet aussi un pseudo-inverse et $\text{Im}(b) = \text{Im}(a) = \text{Im}(a \circ b)$.

Or $a \circ b = b \circ a$ est le projecteur sur $\text{Im}(a)$ parallèlement à $\ker(b)$ admet comme matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ dans la base \mathcal{B} .

On a donc $\left(\begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ donc E inversible et $G = E^{-1}$ ce qui entraîne l'unicité de b donc de B .

Autre méthode:

Si $x \in \ker(a) = \ker(b)$ alors $b(x) = 0$

Soit $x \in \text{Im}(a)$.

On $\ker(a) \cap \text{Im}(a) = \{0\}$ donc a induit un isomorphisme de $\text{Im}(a)$ donc $\exists t \in \text{Im}(a)$, $x = a(t)$ et donc $\exists u \in \text{Im}(a)$, $t = a(u)$

Or $AB = BA$ donc $b(x) = b(a(t)) = b \circ a \circ a(t') = a \circ b \circ a(t') = a(t') = t$.

Il existe un et un seul endomorphisme dont les restrictions à deux sous-espaces supplémentaires soient fixés donc b est unique donc B est unique.

3c: On reprend les notations de Q2. La matrice C admet un polynôme annulateur $P = a_0 + a_1X + \dots + a_kX^k$. On peut supposer que $a_0 \neq 0$ car C est inversible donc on peut multiplier par C^{-1} autant de fois que nécessaire l'égalité $a_0I_r + a_1C + \dots + a_kC^k = 0$.

On en déduit que $I_r = \frac{-1}{a_0} (a_1C + \dots + a_kC^k) = C \times \underbrace{\frac{-1}{a_0} (a_1I_r + \dots + a_kC^{k-1})}_{C^{-1}}$ donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$C^{-1} = Q(C)$.

On en déduit (calcul par blocs) que $\left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = Q \left(\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right)$ puis que $A^+ = B = Q(A)$.

4: On a $\{\|Ax - y\|^2, x \in \mathbb{R}^n\} = \{\|z - y\|^2, z \in \text{Im}(a)\}$. et $\inf_{z \in \text{Im}(a)} \|z - y\|^2 = \|p(y) - y\|^2$ ou p est le projeté orthogonal de y sur $\text{Im}(a)$.

Si $x = A^+y$, alors, $\|Ax - y\|^2 = \|AA^+y - y\|^2$ et AA^+y est le projeté de y sur $\text{Im}(a)$ parallèlement à $\ker(a)$. Or $(\text{Im}(a))^\perp = \ker(a)$ donc AA^+y est le projeté orthogonal de y sur $\text{Im}(a)$ donc $x = A^+y$ minimise f sur \mathbb{R}^n .

De plus, $\|Ax - y\|^2 = \|AA^+y - y\|^2 \Leftrightarrow Ax = AA^+y$ car si $z \in \text{Im}(a) \neq p(y) = AA^+y$, alors $\|z - y\| > \|p(y) - y\|$ donc les éléments x qui minimisent f vérifient $Ax = AA^+y$ soit $A(x - A^+y) = 0$ donc $x - A^+y \in \ker(a)$ donc $\exists t \in \ker(a)$, $x = A^+y + t$. Or $(\text{Im}(a))^\perp = \ker(a)$ et $\text{Im}(a) = \text{Im}(A^+)$ (utiliser par exemple $A = A^+A^2$ et $A^+ = A(A^+)^2$) donc $\|x\|^2 = \|A^+y\|^2 + \|t\|^2$ de norme minimum pour $t = 0$ donc pour $x = A^+y$.