Lundi 18 mai 2026 **(réduction)**

Exercice 1 *(Ccp): Soit (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites réelles vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}.$$

1. *Ecrire ces relations sous forme vectorielle $X_{n+1} = AX_n$.*
2. *La matrice A est-elle diagonalisable? Montrer que 1 est valeur propre de A.*
   Déterminer les éléments propres de A.
3. *A quelle condition les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent toutes vers 0?*

Solution de l'exercice:

1: On pose $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ x_n \end{pmatrix}$. La relation de récurrence est $X_{n+1} = AX_n$.

2: La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux .

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

• Valeurs propres méthode 1:

On vérifie par le calcul que$A^2 = \frac{6}{5}A - \frac{1}{5}I_n = 0$ donc $(X-1)\left(X - \frac{1}{5}\right) = X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{1}{5}$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $sp(A) \subset \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$.

• Valeurs propres méthode 2: $A = \dfrac{1}{5}(I_4 + J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $JU = U$ et $rg(J) = 1$ donc $\dim(E_0(J)) = 3$ donc $sp(J) = \{0, 1\}$

Or $JX = \lambda X \Leftrightarrow AX = \frac{\lambda+1}{5}X$ donc $sp(A) = \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$

On recherche les sous-espaces propres par la résolution de $AX = \lambda X$ (on peut aussi raisonner sur J).

On trouve que $E_1(A) = vect(U)$ et que $H = E_{\frac{1}{5}}(A)$ est l'hyperplan d' équation $x + y + z + t = 0$

3: Les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent vers 0 si et seulement si la suite (X_n) converge vers $0_{\mathbb{R}^4}$.

On a $\mathbb{R}^4 = vect(U) \oplus H$. Posons $X_0 = Y_0 + Z_0$ avec $(Y_0, Z_0) \in vect(U) \times H$.

On a $X_n = A^n X_0 = A^n(Y_0 + Z_0) = A^n Y_0 + A^n Z_0 = Y_0 + \dfrac{1}{5^n}Z_0 \to_{n\to+\infty} Y_0$.

Les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) convergent vers 0 si et seulement si $Y_0 = 0_{\mathbb{R}^4}$ c'est-à-dire $X_0 \in H$

$$\text{soit } u_0 + v_0 + w_0 + x_0 = 0.$$

Exercice 2 *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont elles diagonalisables?*

Solution de l'exercice:

On a $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$ et $sp(A) = sp(B) = \{1, 2\}$.

• Dans $\chi_A = \chi_B$ La multiplicité de 1 est 1 donc $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(B)) \leq 1$ et
on a toujours $\dim(E_\lambda(M)) \geq 1$ si λ est valeur propre de M donc $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(B)) = 1$.

• On vérifie que $rg(A - 2I_3) = 1$ donc $\dim(E_2(A)) = 2$
et $rg(B - 2I_3) = 2$ donc $\dim(E_2(B)) = 1$.

On en déduit que A est diagonalisable et que B ne l'est pas.

Exercice 3 *(Ccinp):*

1. *Soit E un espace vectoriel et u et v deux endomorphismes de E.*
   Montrer que si $u \circ v = v \circ u$ alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

2. *Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*

3. *En déduire 4 solutions de l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

4. *Existe-t-il d'autres solutions de l'équation précédente?*

5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes strictement positives*
   Combien existe-t-il de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = A$?

Solution de l'exercice:

1: Voir cours

2: On remarque que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc 1 et 2 sont valeurs propres de A et comme $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

A est diagonalisable et $sp(A) = \{1, 2\}$ et les sous-espace propres sont de dimension 1

On a donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3: Posons $\Delta = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On a $\Delta^2 = D$. Posons $M = P\Delta P^{-1}$.

On a $M^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = A$. On obtient 4 matrices distinctes

(car $.P\Delta P^{-1} = P\Delta' P^{-1} \Longrightarrow \Delta = \Delta'$: multiplier par P^{-1} à gauche et P à droite).

3: **Supposons** $M^2 = A$**.** Soit u canoniquement associé à A et v canoniquement associé à M

On a $AM = M^3 = MA$ donc d'après Q1, les sous espaces propres de u sont stables par v.

On en déduit que $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(M) = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (Q2: dimension des sous-espaces propres)

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M. De même $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M.

On en déduit que $P^{-1}MP$ est diagonale et $M^2 = A$ donc $(P^{-1}MP)^2 = P^{-1}AP = D$ donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

On a donc $M = P\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$.

Les 4 solutions obtenues en Q2 sont donc les seules solutions.

Exercice 4 *Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$*

1. *On suppose que A et B sont diagonalisables dans une même base et que les valeurs propres de B sont deux à deux distinctes.*
   Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(B)$.

2. *Application pour $n = 3$:*
   On suppose qu"il existe $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ tel que $Q^1BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q^1AQ = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   Donner un polynôme P tel que $A = P(B)$.

3. *On suppose que A et B sont diagonalisables dans une même base*
Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et deux polynômes P_A et P_B dans $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$A = P_A(C) \text{ et } B = P_B(C).$$

Solution de l'exercice:
1:.Les matrices A et B sont sont diagonalisables dans une même base donc
il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = Q'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales.
Posons $D = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ et $D' = \operatorname{diag}(\beta_1, \cdots, \beta_n)$
Les valeurs propres de B sont toutes distinctes donc $\beta_i \neq \beta_j$,si $i \neq j$.
D'après le cours, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [[1; n]], P(\beta_k) = \alpha_k$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ $(D')^k = \operatorname{diag}\left((\beta_1)^k, \cdots, (\beta_n)^k\right)$.
On en déduit que $P(D') = \operatorname{diag}(P(\beta_1), \cdots, P(\beta_n))$ (voir correction de l'exercice 6).
On a donc $P(D') = D$.
On en déduit que $P(B) = QP(D')Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.
2 On pose $L_1 = \dfrac{(X-2)(X-3)}{(1-2)(1-3)}$, $L_2 = \dfrac{(X-1)(X-3)}{(2-1)(2-3)}$ et $L_2 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{(3-1)(3-2)}$.
On a $\begin{cases} L_1(1) = 1 \\ L_1(2) = 0 \\ L_1(3) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} L_1(1) = 0 \\ L_2(2) = 1 \\ L_3(3) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} L_3(1) = 0 \\ L_3(2) = 0 \\ L_3(3) = 1 \end{cases}$ donc
si $P = 4L_1 - L_2 - L_3$, on a $\begin{cases} P(1) = 4 \\ P(2) = -1 \\ P(3) = -1 \end{cases}$ donc (voir Q1), on a $P(B) = A$.
3. Si A et B sont diagonalisables,dans une même base, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $B = QD'Q^{-1}$ avec D et D' diagonales.
Posons $\Delta = \operatorname{diag}(1, 2, \cdots, n)$ et $C = Q\Delta Q^{-1}$.
D'après **Q3.**, comme les valeurs propres de C sont distinctes et que A et C sont diagonalisables dans une même base, il existe $P_A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P_A(C)$.
De même,il existe $P_B \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = P_B(C)$.

Exercice 5 *mines telecom: Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. La matrice $M(z)$ a-t-elle des valeurs propres multiples?

2. A quelle condition la matrice $M(z)$ est-elle diagonalisable?

3. Démontrer que si $M(z)$ admet une valeur propre de module supérieur ou égale à 1, alors $|z| \geq \frac{1}{2}$.

4. Montrer que si $|z|$ est assez petit, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (M(z)^n) = 0$.

Solution de l'exercice: Q1: $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet $P = X^3 - zX - z$ comme polynôme caractéristique.
Le scalaire λ est racine multiple de P ssi $\begin{cases} P(\lambda) = 0 \\ P'(\lambda) = 0 \end{cases}$: (S).
Or $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - z\lambda - z = 0 \\ 3\lambda^2 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0 \\ 3\lambda^2 = z \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ et } z = 0)$ ou $(\lambda = -\frac{3}{2} \text{ et } z = \frac{27}{4})$.
On vérifie que dans le premier cas, $\lambda = 0$ est racine triple.
Dans le deuxième, $P''(\lambda) \neq 0$ donc la racine est double.
Q2: • Si $z \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}$, alors la matrice $M(z)$ admet 3 valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.

• La matrice $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet 0 comme unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle donc égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

• Si $z = \frac{27}{4}$, déterminons la dimension de $E_{-\frac{3}{2}}$. On a $M\left(\frac{27}{4}\right) + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ donc $rg\left(M\left(\frac{27}{4}\right) + \frac{3}{2}I_3\right) \geq 2$.
On en déduit donc $\dim\left(E_{-\frac{3}{2}}\right) \leq 1$ donc $\dim\left(E_{-\frac{3}{2}}\right) = 1 < 2 = m\left(-\frac{3}{2}\right)$ (multiplicité)
$\boxed{\text{donc } M\left(\frac{27}{4}\right) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
3: Soit λ soit une valeur propre de $M(z)$. On a donc $z(\lambda+1) = \lambda^3$ donc en particulier, $\lambda \neq -1$ et $z = \frac{\lambda^3}{\lambda+1}$.
Si $|\lambda| \geq 1$ alors $|\lambda|^3 \geq |\lambda| \geq 1$ donc $2|\lambda|^3 \geq |\lambda| + 1 \geq |\lambda+1|$ donc $|z| \geq \frac{1}{2}$.
4: On vérifie que $M(0)^3 = 0$ donc si $n \geq 3$, $M(0)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(0)^n\right) = 0$.
• Si $0 < |z| < \frac{1}{2}$ alors, d'après 2, la matrice $M(z)$ est diagonalisable d'après Q2
et d'après 3, ses valeurs propres vérifient $|\lambda| < 1$.
Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1}M(z)P$ une matrice diagonale semblable à $M(z)$.
On a $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}$ et $M(z)^n = PD^nP^{-1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(z)^n\right) = 0$ par continuité du produit matriciel.
• Si $z = 0$ alors $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On vérifie que $M(0)^3 = 0$ donc $\forall k \geq 3$, $M(0)^k = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(M(0)^n\right) = 0$.

Exercice 6 *Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$*

1. *Donner un exemple de matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable dont le carré est diagonalisable.*
2. *Donner un exemple de matrice non inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diiagonalisable dont le carré est diagonalisable.*
3. *On suppose que A est diagonalisable et $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $\mathrm{P}(A)$ est diagonalisable.*
4. *On suppose A est inversible.*
   Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\left(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k\right.$ diagonalisable).

Solution de l'exercice:
1: La matrice $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et de polynôme caractéristique $X^2 + 1$
donc n'admet pas de valeurs propres donc n'est pas diagonalisable.
Son carré est $R_\pi = -I_2$ qui est diagonalisable car diagonale.
2 La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $sp(J) = \{0\}$ et est non nulle donc elle n'est pas diagonalisable.
On a $J^2 = 0$ est diagonalisable.
3: Si A est diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$.
Par une récurrence classique, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = QD^kQ^{-1}$ donc,
si $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k Q D^k Q^{-1} = Q\left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k D^k\right)Q^{-1} = QD'Q^{-1}$

avec $D' = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k D^k$ diagonale donc, par définition, $P(A)$ est diagonalisable.
4. Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.
($\Longrightarrow$) Si A est diagonalisable, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = P(A)$ avec $P = X^k$ donc est diagonalisable d'après la question 1.
On a donc: $\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k$ est diagonalisable et même $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k$ est diagonalisable.
($\Longleftarrow$) S'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k est diagonalisable.
La matrice A est inversible donc A^k est inversible donc $0 \notin sp\left(A^k\right)$.
Soit $\mu_1, \cdots, \mu_r$ les valeurs propres distinctes (non nulles) de A^k.
On sait que $P = \prod\limits_{i=1}^{r} (X - \mu_i)$ est annulateur de A^k donc $\prod\limits_{i=1}^{r} \left(A^k - \mu_i I_n\right) = 0$.
donc $Q = \prod\limits_{i=1}^{r} \left(X^k - \mu_i\right)$ est polynôme annulateur de A.
Montrons que Q est scindé à racines simples.
On a $Q = \prod\limits_{i=1}^{r} Q_i$ avec $Q_i = X^k - \mu_i$
On a $\mu_i \neq 0$ donc l'équation $z^k = \mu_i$ admet k racines distinctes.
donc Q_i **est scindé à racines simples**.
Si $i \neq j$ alors z_i est racine de Q_i et z_j est racine de Q_j.alors $(z_i)^k = \lambda_i$ et $(z_j)^k = \mu_j$ donc $z_i \neq z_j$.
Si $i \neq j$ alors Q_i et Q_j n'ont pas de racines communes.
On en déduit que Q est scindé à racines simples donc la matrice A est diagonalisable.
Par double implication, si A est inversible, on a A diagonalisable $\Longleftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N}^*, A^k\right.$ diagonalisable).

Exercice 7 *(Centrale) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes diagonalisables de E vérifiant $u \circ v = v \circ u$.*
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonalisables.

Solution de l'exercice:
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de v.
On a $u \circ v = v \circ u$ donc $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v (cours)
D'après le cours v est diagonalisable donc l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$ est diagonalisable.
Il existe b_i base de $E_{\lambda_i}(u)$ formé de vecteurs propres de v.(qui sont aussi vecteurs propres de u car dans $E_{\lambda_i}(u)$)
Or u est diagonalisable donc $E = \bigoplus E_{\lambda_i}(u)$ donc $(b_1, \ldots, b_k)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u et de v.
Donc u et v sont diagonalisables dans une même base.

Exercice 8 *(Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soient f, g deux endomorphismes non nuls de $\mathbb{C}^n$ tels que $f \circ g = 0$.*
   (a) *Montrer que* $\ker f \neq \{0\}$.
   (b) *Montrer que* $\ker f$ *est stable par g.*
   (c) *En déduire que f et g ont un vecteur propre en commun.*
2. *Soient deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont trigonalisables dans une même base.*

Solution de l'exercice:
1a: Si f injective alors f est bijective $(\dim(E) = \dim(F))$ donc $g = f^{-1} \circ f \circ g = 0$ contredit l'hypothèse donc f n'est pas injective donc $\ker(f) \neq \{0\}$.
1b: On a $f \circ g = 0$ donc $\mathrm{Im}(g) \in \ker(f)$ donc $\forall x \in \mathbb{C}^n, g(x) \in \ker(f)$ donc $\forall x \in \ker(f), g(x) \in \ker(f)$ donc

$\ker(f)$ est stable par g.
1c: $\ker(f)$ est un sous-ev de $\mathbb{C}^n$ donc est espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Soit g_1 l'endomorphisme induit par g sur $\ker(f)$.
Le polynôme caractéristique χ_{g_1} est scindé (car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) donc g_1 admet une valeur propre donc un vecteur propre: $\exists (e, \lambda) \in \ker(f) \times \mathbb{C}$, $g(x) = g_1(x) = \lambda x$. Or $x \in \ker(f)$ donc x est vecteur propre de f.
2: Le résultat est vrai pour $n = 1$.
Supposons le vrai pour n, montrons le pour $n+1$.
Soient deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.
• Si $A = 0$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc est trigonalisable: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}BP$ est triangulaire et $P^{-1}AP = 0$ est triangulaire.
• Si $A \neq 0$.
Soit f et g canoniquement associés à A et B, b_0 la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ et e un vecteur propre commun à f et g.
Complétons e en une base b de $\mathbb{C}^{n+1}$.
Par construction $A' = mat_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0_{n,1} & A_0 \end{array}\right)$ (avec $\alpha = 0$) et $B' = mat_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L' \\ \hline 0_{n,1} & B_0 \end{array}\right)$.
On a $AB = 0$ donc $f \circ g = 0$ donc $\left(\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0_{n,1} & A_0 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L' \\ \hline 0_{n,1} & B_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\lambda & L'' \\ \hline 0_{n,1} & A_0B_0 \end{array}\right) 0$ donc $A_0B_0 = 0$.
Par hypothèse de récurrence, il existe $P_0 \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $(P_0)^{-1} A_0 P_0 = T_0$ et $(P_0)^{-1} B_0 P_0 = T_0'$.
Posons $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & P_0 \end{array}\right)$. On vérifie que $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & (P_0)^{-1} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & P_0 \end{array}\right) = I_{n+1}$ donc $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & P_0 \end{array}\right)$
En appliquant les règles du produi par blocs, on obtient
$P^{-1}A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n} \\ \hline 0_{n,1} & P_0 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0_{n,1} & A_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times \alpha + 0_{1,n} \times 0_{n,1} & 1 \times L + 0_{1,n} \times A_0 \\ \hline 0_{n,1} \times \alpha + P_0 \times 0_{n,1} & 0_{n,1} \times 0_{1,n} \times P_0 \times A_0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & L \\ \hline 0_{n,1} & P_0 \times A_0 \end{array}\right)$
De même $P^{-1}A'P = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & L'' \\ \hline 0 & T_0 \end{array}\right) = T$ avec $L'' = \alpha 0_{1,n} + LP_0 = LP_0$ donc T triangulaire supérieure
De même $P^{-1}B'P = T'$ est triangulaire supérieure.
$\begin{cases} P^{-1}A'P = T \\ P^{-1}B'P = T' \end{cases}$ et $\begin{cases} Q^{-1}AQ = A' \\ Q^{-1}BQ = B' \end{cases}$ donc $\begin{cases} (PQ)^{-1} AQP = T \\ (PQ)^{-1} BQP = T' \end{cases}$: A et B sont trigonalisable dans une même base.