

Exercice 1 (ccinp)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x\sqrt{n} = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. (on note cette solution x_n).
2. Déterminer la limite de la suite (x_n) .
3. Déterminer la nature de la série $\sum x_n$.

Exercice 2 (ccinp) Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $f(x) = \tan(x)^{\tan(2x)}$.

Déterminer les limites de f en 0^+ , en $\frac{\pi}{4}$ et en $\frac{\pi}{2}^-$

Exercice 3 (ccinp) On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Établir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2. En considérant $u_{n+1} - u_n$ montrer que la série $\sum u_n^3$ converge.
3. En considérant $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ montrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 4 (Ccinp)

1. Donner un développement limité de la fonction arctangente à l'ordre 2 en $x = 1$.
2. Montrer que la courbe représentant la fonction définie par $f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$ admet une asymptote au voisinage de $+\infty$.
Préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote en $+\infty$
(on pourra écrire $f(x)$ sous forme $ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$).

Exercice 5 (Ccinp) Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. Étudier la suite (u_n) .
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
3. On pose $p_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$. Montrer que la suite (p_n) converge.
4. En déduire que la suite $(2^n u_n)$ converge.

Exercice 6 (Ccinp) Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que $\forall (x, y), f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$.

1. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$.
 - (a) Montrer que f est impaire et 2-périodique. En déduire que f est bornée.
 - (b) Montrer que $f(2x) = 2f(x)$. En déduire la nullité de f .
2. Déterminer f dans le cas général.

Exercice 7 (centrale)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $nx = \cos(x)$ admet une et une seule solution dans $[0, 1]$ que l'on notera x_n .
2. Etudier la convergence et la monotonie de la suite (x_n) .
3. Démontrer que $x_n \sim \frac{1}{n}$ puis trouver un équivalent de $x_n - \frac{1}{n}$ (on pourra écrire $x_n = \frac{1}{n} + v_n$).
4. Donner un développement asymptotique de x_n lorsque n tend vers $+\infty$ comportant 3 termes significatifs.

Exercice 8 (Mines ponts) Soit f et g deux fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On pose $A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$.

1. Soit E une partie non vide majorée de \mathbb{R} et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup(E)$ si et seulement si M est un majorant de E et il existe une suite d'éléments de E qui converge vers M .
2. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.
3. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 (IMT) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle définie par $u_1 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq e + |u_1|$.
2. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite l .
3. Donner un équivalent en $+\infty$ de $u_n - l$.
4. Donner un développement asymptotique de u_n de la forme $a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10 (Centrale):

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = t + \frac{t^3}{3}$ est une bijection. Justifier que g^{-1} est de classe C^1 .
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f^2(t)} dt?$$