

mercredi 27 mai (séries intégrales)

Exercice 1 (ccinp) 23 Pour $n \in \mathbb{N}$, en cas de convergence, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.

1. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = nI_n$.

- Trouver une relation entre J_n et J_{n-1} .
- Calculer J_1 . En déduire que une expression et un équivalent de I_n pour $n \geq 1$.

Exercice 2 (Ccinp) Soit $\alpha > 1$. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. A quelle condition la série de terme général R_n est-elle convergente?

Exercice 3 (ccinp) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\frac{1}{n}} + a \cos\left(\frac{1}{n}\right) + b \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$

Pour quelles valeurs de (a, b) la série $\sum u_n$ est-elle convergente?

Exercice 4 (Ccinp) Soit $a > 0$. Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$.

Exercice 5 (Ccinp) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

Exercice 6 (Ccinp) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On pose $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \times \dots \times (1+a_n)}$.

1. Calculer $u_1 + u_2$. Donner une forme simplifiée de $\sum_{i=1}^n u_i$.

2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge

3. Calculer sa somme pour $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7 (Mines ponts) Nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+2} \times (-1)^n}$

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$.

1. Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer que la série numérique $\sum u_n$ diverge.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} u_n$.

5. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Exercice 9 (Ccinp): Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$. ($[x]$ est la partie entière de x).

Exercice 10 (centrale): Soit c_n le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base 10. Montrer que la série de terme général $\frac{c_n}{n(n+1)}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 11 (mines ponts) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$. Déterminer la limite de la suite (S_n) .