

# Vendredi 29 mai (suites et séries de fonctions)

## Exercice 1 (ccp 2015)

1. Calculer  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .
2. Donner le développement en série entière de la fonction arctangente.  
En déduire que  $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ .
3. Déterminer avec la calculatrice une valeur de  $n$  à partir de laquelle  $8 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (\sqrt{2}-1)^{2k+1}$  est une approximation de  $\pi$  à  $10^{-10}$  près.

## Exercice 2 (Ccinp) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , soit $G_n$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $G_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|G'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$ .
2. En déduire que  $\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t - 1 \right| \leq \frac{te^t}{n}$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$  on pose  $I_n(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t dt$ . Montrer que la suite de fonctions  $(I_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ . La suite de fonctions  $(I_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$ ?

## Exercice 3 (Ccinp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (3n+1)^2 x^n$ .

## Exercice 4 (Tpe 2017) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ , on pose $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ .

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
2. Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

## Exercice 5 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq p} \binom{n}{p} x^n$ et calculer sa somme.

## Exercice 6 (ccinp) Soit pour $n \in \mathbb{N}$ , $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$ . On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$ .
2. Soit  $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ . Justifier l'existence de  $J$ .
3. Montrer que  $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{J}{n}$ .
4. Justifier que  $J = \frac{\pi^2}{12}$ .

## Exercice 7 Mines On pose, pour $\theta$ réel et $n \in \mathbb{N}$ , $u_n = \frac{n \sin^2(n\theta)}{2^n}$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour  $z \in \mathbb{C}$  vérifiant  $|z| < 1$ , justifier que la série  $\sum nz^n$  converge et préciser sa somme.

3. En déduire la somme de la série  $\sum u_n$ .

**Exercice 8** (ccinp) Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ , on pose  $f_n(x) = 3^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ .

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .

2. Comparer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(t)) dt$ . Que peut-on en déduire?

**Exercice 9** (Mines ponts) Soit  $a \in \mathbb{R}$ , tel que  $|a| < 1$  et  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{1 - |a|}$ .

3. Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 10** (Mines ponts)

1. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  définie par  $f_n(x) = 0$  si  $|x| > \frac{1}{n}$  et  $f_n(x) = n - n^2|x|$  si  $|x| \leq \frac{1}{n}$ .

2. Etudier la limite de la suite de terme général  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) g(x) dx$  ou  $g$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .